

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 5月 30日現在

機関番号：12605

研究種目：基盤研究（B）

研究期間：2009～2011

課題番号：21340003

研究課題名（和文） 環と加群圏の代数構造の表現論的研究

研究課題名（英文） Representation theoretical research on algebraic structures of rings and module categories

研究代表者

山形 邦夫（YAMAGATA KUNIO）

東京農工大学・大学院工学研究院・教授

研究者番号：60015849

研究成果の概要（和文）：多元環や加群圏の構造について研究を行い、有限次元多元環上の加群圏への新たな概念の導入や一般化を通して、多元環と加群圏の関係や有限群環の構造とその表現などについて、未解決問題の解決を含む多くの成果を上げた。これらは本研究組織の各研究者によって国内外の国際会議やシンポジウムなどで発表され専門雑誌に掲載された。また多元環の表現論に関する国際会議を開催して国内外の多くの研究者と交流を行い、その成果をヨーロッパ数学会より出版するなど表現論研究の進展に大きな貢献をした。さらにこれまでの研究成果の出版を企画し第一巻をヨーロッパ数学会より出版した。

研究成果の概要（英文）：We studied structures of finite dimensional algebras and categories of modules over the algebras, so that we have achieved many results including solutions of open problems. Those results were announced at domestic or international conferences and symposiums and were published in refereed journals in English. By organizing an international conference on representations of algebras in Tokyo, we made an enormous contribution to the development of the representation theory. The proceedings of the conference and the first volume of a book based on our research were published from the European Mathematical Society.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	4,400,000	1,320,000	5,720,000
2010年度	5,100,000	1,530,000	6,630,000
2011年度	3,600,000	1,080,000	4,680,000
年度			
年度			
総計	13,100,000	3,930,000	17,030,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：環、多元環、加群、表現、圏、クイバー

1. 研究開始当初の背景

加群圏の代数的性質と多元環の構造との関係を明らかにすることは多元環の表現論研究の主流であり多くの未解決問題が残されている。これらの問題の解明には既知の概念

の一般化や関連する様々な分野の知識を総合して研究を行う必要がある。一方、フロベニウス多元環や有限群の表現、コーエン・マコーレー環の表現などはそれぞれ一研究分野をなす重要な研究対象であり多くの日本人

研究者が世界的な研究成果をあげており、世界の研究者から多元環の表現論に関する国際会議を日本で開催して研究の交流を行うことの重要性が指摘されるようになっていた。このような国内外の状況から、多元環の表現論研究や会議の遂行のために各分野の研究者が連携して問題の解明にあたることの重要性が認識されるようになっていた。

2. 研究の目的

有限次元多元環上の加群圏の代数的な性質と多元環の構造との関係の解明を目指す。また国際会議を日本で開催して研究成果を世界に発信し、世界の研究者との情報交換や共同研究を促進して表現論研究の進展に貢献する。

3. 研究の方法

本研究組織の研究者間の討論や打ち合わせ、情報交換などのために、シンポジウム、セミナー、各種学会の場などを利用した。また国内外の研究集会に参加し、発表や討論を通して多くの研究者との研究交流や情報収集を活発に行った。とくに本研究組織の総力を挙げて 2010 年に国際会議を東京で開催し世界の研究者を集結して研究交流を実施した。主な研究集会は次の通りである。

(1) 国際会議

- ① 第 6 回中韓環論国際会議 (韓国 2011)
- ② 第 14 回多元環の表現論国際会 (ICRA14) (東京 2010)

(2) 国内での学会やシンポジウム

- ① 日本数学会年会、秋季総合分科会
- ② 環論および表現論シンポジウム
- ③ 可換環論シンポジウム
- ④ 名古屋大学セミナー、静岡大学セミナー
このほか次の海外研究者を招聘し共同研究や研究交流・情報収集を行った。

(1) 東京農工大学に招聘

A. Skowronski, J. Bijalkowski (ポーランド 2009)、O. Kerner (ドイツ 2011)

(2) 環論および表現論シンポジウムに招聘

F. van Oystaeyen (ベルギー 2009)、
D. Zacharia, J. A. Wood (米国 2011)

(3) 第 14 回多元環の表現論国際会議 (2010)

C. M. Ringel (ドイツ)、G. Keller (フランス)、
I. Reiten (ノルウェー)、他 14 名

4. 研究成果

研究組織の各研究者それぞれが専門とする研究課題を設定し、国内外の研究者との情報交換を行いながら研究を行った。その結果、多数の共同研究が行われ、多くの成果が得られた。おもな成果は下記の通りである。

(1) Frobenius 多元環上の加群の研究 (山形) : Auslander-Reiten クイバーが一般化された標準連結成分を有するような Frobenius 多元環を決定する問題の研究を行い、準管型 Auslander-Reiten 連結成分の族の組成剰余群に関する或る条件の下で、Frobenius 多元環が無限巡回群によるガロア被覆を有することを証明した。とくに安定管から成る族の場合には、無限巡回群の型が一通りに定まることを示した。ガロア被覆の存在の判定には Skowronski-Yamagata の判定法が重要な役割を演ずる。この成果は 2010 年に東京で開催した国際会議 ICRA 14 において、重要な成果と評価されて共同研究者の一人である M. Karpicz により特別講演として発表された。また森田理論の誕生となった 1958 年の森田紀一による研究の見直しも行った。Frobenius 多元環上の忠実加群の準同型多元環の構造が森田によって解明されたが、その後 50 年以上大きな進展はなかった。しかし本研究によって、2011 年に M. Fang-S. Koenig によって導入されたある両側加群が森田の定理を完全に支配していることを示す画期的な成果を得た。

Frobenius 多元環の構造と表現圏に関する研究を代表者が海外研究協力者 Skowronski と行ってきた共同研究の成果を単行本として第一巻をヨーロッパ数学会から出版した。

(2) 高次元 Auslander-Reiten 理論の研究 (伊山) : 高次元 Auslander-Reiten 理論で重要な概念である n 有限表現型多元環の研究を行い、 n 有限表現性が n -APR 傾加群の自己準同型環をとる操作で保たれることを示し、数多くの n 有限表現型多元環が得られた。また n 有限表現型多元環の $(n+1)$ 前射影多元環は自己入射的となることを示した。 n 有限表現型多元環の $(n+1)$ 前射影多元環の安定加群圏は $(n+1)$ -Calabi-Yau 性を有することを示した。とくに 2 有限表現型多元環を自己入射的なポテンシャル付きクイバーの切断ヤコビ

多元環として特徴付ける構造定理を与えた。さらにポテンシャルの自己入射性が中山軌道に沿った変異で保たれることを示し、その応用として数多くの2有限表現型多元環を構成した。また単純特異点と、対応するDynkinクイバーの道多元環の間に存在するある三角圏同値を体系的な枠組みで捉えなおし、ある種のCalabi-Yau多元環とその巾等元に伴随するGorenstein環と有限次元多元環の間の圏同値として大幅に一般化した。

本研究は2010年度日本数学会春季賞受賞に関わった。

(3) 有限次元群多元環の環構造の研究(越谷) : 有限群環上の加群圏の構造および表現論の問題として、表現と対応している有限群の指標の様子を調べることで、およびブラウア-対応と名付けられている二つのブロック多元環の加群圏どうしの関係を調べることなどは非常に重要である。これらはアルペリンの重み定理予想、ブルエの可換不足群予想と呼ばれる重要な予想問題と大いに関係がある。これらの問題を中心に研究を行い、散在型有限単純群である原田ノートン群とコンウェーの3番目の群に関してブルエ予想を解いた。また不足群がメタ巡回群である場合にブルエ予想の拡張であるルキエ予想を解いた。アルペリンの重み予想についても、不足群のある条件の下で肯定的に解いた。同時に弱い形(指標に関する)のブルエ予想を解き、ブラウア-の古くからの問題を37年振りに進展させ、有限群の表現論において大きなインパクトを与えた。

(4) 加群圏の被覆理論の研究と応用の研究(浅芝) : 多元環の種々のクラスを導来同値分類することを目指して研究を行った。群 G の作用をもつ線型圏 C から、その作用のもとでの軌道圏 C/G への被覆関手と導来同値との関係を調べ、 G 作用をもつ(可換環上の)小圏全体のある2圏と、 G 次数付き小圏全体のある2圏が2同値であることを示した。さらにこの設定で群を圏に、作用をラックス作用に一般化して圏のラックス作用をもつ線型圏の族を考え、2つの反転ラックス関手が導来同値であるための必要十分条件を傾反転ラックス関手の概念を用いて与えた。これにより反転ラックス関手の導来同値性を判

定することが容易になった。また、二つの反転ラックス関手が導来同値ならばそれらのGrothendieck構成も導来同値になるという定理を証明した。この主定理を応用して、互いに導来同値な多元環の対の族を貼り合わせて、導来同値な大きな多元環の対を構成する方法を与えた。

被覆理論の研究には2圏論的考察は不可欠なものであることが本研究により示され、2圏論的手法は今後一層重要となるだろう。

(5) Faith予想の研究(大城) : 1967年に「semiprimary right self-injective ringはQF-ringであるか」という問題がC. Faithによって提起され否定的に予想された。この予想とその周辺の研究を行い、Faithの問題についてある重要な場合に肯定的であることを示した。この結果はFaithをはじめ多くの環論研究者の関心を集めている。また多くの新しいQF-環の例を構成した。

(6) 非可換ネター環上の加群の研究(西田) : ある種の岩澤代数をモデルとしその環論的性質を抽象化してフィルター擬コンパクト多元環の概念を確立し、Auslander正規な場合に適用してAuslander-Buchsbaum公式が成り立つことを証明した。さらに局所コホモロジー加群の定義を与え、局所コホモロジー加群とExt群とを結びつける局所双対の成り立つ事を示した。また非可換ネター多元環上のCohen-Macaulay加群の成す圏上の余syzygyについて研究し、Cohen-Macaulay多元環上の安定圏に作用するsyzygy関手の逆の作用と見なせる余syzygy関手をCohen-Macaulay多元環に対して構成した。

(7) 可換ネター環上の加群の研究(吉野) : 当連携研究者が提唱している加群の退化の代数的定義に基づいてCohen-Macaulay加群の退化の新しい理論体系の構築について研究を行った。その結果、安定圏における退化は従来の退化と密接な関係にあり、実際の計算においては安定圏における退化の方が易しいこと、その結果を用いて従来の加群圏における退化の様子を知ることができることなどが分った。また導来圏における t -構造と局所コホモロジー関手の関連について、抽象局所コホモロジー関手という新しい概念を導入して、サポートが二つのイ

デアルの組によって与えられる一般化された局所コホモロジー関手が抽象コホモロジー関手全体の中で十分に自然な存在であることを示した。さらに、素数を標数を持つ局所環上の有限生成加群について、その上の Frobenius 写像の左からの作用はその Matlis 双対の右からの作用に自然に拡張される。この対応によって歪多項式環上の右加群（素数標数局所環上有限生成加群）と左加群（基礎環上アルティン加群）との間に双対性が成立することを証明し、Frobenius 型の歪多項式環の研究を深化させた。

(8) 非可換代数幾何の研究（毛利）：非可換代数幾何学における主要研究対象である量子射影空間の研究と、多元環の表現論における主要研究対象である大域次元有限な有限次元多元環の研究とを三角圏を介して関係付けた。主な結果は次の通りである。近年源泰幸により導入された大域次元有限な有限次元多元環である Fano 代数の分類問題と AS-regular 代数の分類問題との間に導来圏という三角圏を介して、密接な関わりがあることを証明した。この結果は日本数学会年会において代数学分科会特別講演として発表された。また第 14 回多元環の表現論国際会議 ICRA 14 において特別講演として発表した。この関連性の応用として、代数幾何学と多元環の表現論との間の対応である McKay 対応を非可換化、高次元化することにも成功し、第 6 回日中韓環論国際会議（韓国）において特別講演として発表した。

これらの研究によって非可換代数幾何学と多元環の表現論とが大きく関連していることが分かり、今後の更なる相互発展が期待される。

(9) 有限次元多元環のカルタン行列の研究（和田、越谷、佐藤）：和田が中心となって有限群のブロックにおけるカルタン行列の固有値の研究を中心に、ブルエの可換不足群予想との関係、新たなブロックの性質などを研究した。その結果、有限群のブロックにおけるカルタン行列のペロン-フロベニウス固有値について和田の定理を一般化した。そして懸案の一つだった p -可解群の p -ブロックで、カルタン行列のすべての固有値が整数ならばペロン-フロベニウス固

有値は不足群の位数に一致することを証明した。また越谷を中心とした研究において、主ブロックで考えるある有限群に対してカルタン行列の固有値に関する和田の予想を証明した。

5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 41 件）

- ① Maciej Karpicz, Andrzej Skowroński, Kunio Yamagata, On selfinjective Artin algebras having generalized standard quasitubes. J. Pure Appl. Algebra, 査読有, Vol. 215, No. 11, 2011, pp. 2738-2760
- ② Herschend Martin, Osamu Iyama, Selfinjective quivers with potential and 2-representation-finite algebras, Compositio Math. 査読有, Vol. 147, No. 6, 2011, pp. 1885-1920
- ③ Radha Kessar, Shigeo Koshitani, Markus Linckelmann, Conjectures of Alperin and Broue for 2-blocks with elementary abelian defect groups of order 8, J. Reine Angew. Math. 査読有, DOI 10.1515/CRELLE.2011.162, 46 頁
- ④ Shigeo Koshitani, Juergen Mueller, Felix Noeske, Broue's abelian defect group conjecture holds for the sporadic simple Conway group Co3, J. Algebra, 査読有, Vol. 348, 2011, pp. 354-380
- ⑤ Hideto Asashiba, A generalization of Gabriel's Galois covering functors and derived equivalences, J. Algebras, 査読有, Vol. 334, 2011, pp. 109-149
- ⑥ Izuru Mori, Hiroyuki Minamoto, The structure of AS-Gorenstein algebras, Adv. In Math. 査読有, Vol. 226, 2011, pp. 4061-4095
- ⑦ Rodney Sharp, Yuji Yoshino, Right and left modules over the Frobenius skew polynomial ring in the F-finite case, Math. Proc. Cambridge Philos. 査読有, Vol. 150, No. 3, 2011, pp. 419-438

- ⑧ Yuji Yoshino, Stable degenerations of Cohen-Macaulay modules, J. Algebra, 査読有, Vol.332, 2011, pp.500-521
- ⑨ Osamu Iyama, Michael Wemyss, The classification of special Cohen-Macaulay modules, Math. Z. 査読有, Vol.265, No.1, 2010, pp.41-83
- ⑩ Shigeo Koshitani, Juergen Mueller, Broue's abelian defect group conjecture holds for Harada-Norton sporadic simple group HN, J. Algebra, 査読有, Vol.324, No.3, 2010, pp.394-429
- ⑪ Miles Holloway, Shigeo Koshitani, Naoko Kunugi, Blocks with nonabelian defect groups which have cyclic subgroups of index p , Arch. Math. 査読有, Vol.94, No.2, 2010, pp.101-116
- ⑫ Tetsuro Okuyama, Tomoyuki Wada, Eigenvalues of Cartan matrices of blocks in finite groups, Contemporary Math, Amer. Math. Soc. 査読有, Vol.542, 2010, pp.127-138
- ⑬ Saeed Nasseh, Yuji Yoshino, On Ext-indices of ring extensions, J. Pure Appl. Algebra, 査読有, Vol.213, No.7, 2009, pp.1216-1223
- ⑭ Izuru Mori, Asymmetry of Ext-groups, J. Algebra, 査読有, Vol.322, No.6, 2009, pp.2235-2250
- ⑮ Masahisa Sato, カルタン行列とその周辺の話題について, 第54回代数シンポジウム報告集, 査読無, Vol.54, 2009, pp.1-29

[学会発表] (計95件)

- ① 伊山修, Pseudo-tilting theory, Representation theory of Chevalley groups and related topics, 2012年3月15日, 名古屋大学
- ② 越谷重夫, On Alperin-Scott modules and related topics in representation theory of finite groups, 第55回 Bristol-Leicester-Oxford-London 研究集会, 2012年2月17日, Oxford 大学数学研究所 (イギリス)

- ③ 吉野雄二, Introduction of representation theory of Cohen-Macaulay modules and their degenerations I, II, 第44回環論および表現論シンポジウム, 岡山大学, 2011年9月25日, 26日
- ④ 伊山修, Tilting and cluster tilting for stable categories of Cohen-Macaulay modules, Non-commutative Algebraic Geometry, 2011年9月16日, 復旦大学 (中国)
- ⑤ 大城紀代一, On the Faith conjecture, 第6回日中韓環論国際会議, 2011年7月1日, Kyung Hee University (韓国)
- ⑥ 毛利出, McKay Type Correspondence for AS-regular Algebras, 第6回日中韓環論国際会議, 2011年6月29日, Kyung Hee University (韓国)
- ⑦ 和田俱幸, Generalized characters and Cartan eigenvalues in finite groups, ICRA XIV, 2010年, 8月15日, 国立オリンピック記念青少年センター (東京)
- ⑧ 浅芝秀人, The Grothendieck construction and derived equivalences, ICRA XIV, 2010年8月14日, 国立オリンピック記念青少年センター (東京)
- ⑨ 吉野雄二, Degeneration of Cohen-Macaulay modules in stable category, ICRA XIV, 2010年8月13日, 国立オリンピック記念青少年センター (東京)
- ⑩ 毛利出, Classification problems in non-commutative algebraic geometry and representation theory, ICRA XIV, 2010年8月12日, 国立オリンピック記念青少年センター (東京)
- ⑪ 伊山修, Stable categories of Cohen-Macaulay modules and cluster categories, ICRA XIV, 2010年8月11日, 国立オリンピック記念青少年センター (東京)
- ⑫ 越谷重夫, Relative projective covers for Broue's abelian defect group conjecture, Group representation theory and related topics, 2010年6月22日, 連邦工科大学 (スイス)
- ⑬ 伊山修, 整環の表現論 高次元 Auslander-Reiten 理論, 日本数学会年

会, 2010年3月25日, 慶應大学理工学部 (横浜)

- ⑭ 越谷重夫、Broue's abelian defect group conjecture and its analogue, Conference on Algebraic Topology, Group Theory and Representation Theory, 2009年6月11日, Sabhal Mor Ostaig スカイ島 (イギリス)
- ⑮ 和田俱幸、Eigenvalues of Cartan matrices of finite groups, Isaacs Conference, 2009年6月3, 4, 5日, University of Valencia (スペイン)

[図書] (計3件)

- ① Andrzej Skowronski, Kunio Yamagata, European Mathematical Society, Frobenius Algebras I (Basic representation theory), 2011, 650
- ② Andrzej Skowronski, Kunio Yamagata (編)、European Mathematical Society, Representations of Algebras and Related Topics, 2011, 710
- ③ 岩永恭雄、佐藤真久、日本評論社、環と加群のホモロジー的代数理論(第2版)、2011、297

6. 研究組織

(1) 研究代表者

山形 邦夫 (YAMAGATA KUNIO)
東京農工大学・大学院工学研究院・教授
研究者番号：60015849

(2) 研究分担者

伊山 修 (IYAMA OSAMU)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授
研究者番号：70347532

越谷重夫 (KOSHITANI SHIGEO)
千葉大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：30125926

(3) 連携研究者

浅芝 秀人 (ASASHIBA HIDETO)
静岡大学・理学部・教授
研究者番号：70175165

大城 紀代一 (OHSHIRO KIYOICHI)
山口大学・大学院理学研究科・名誉教授
研究者番号：90034729

佐藤 真久 (SATO MASAHISA)

山梨大学・大学院医学工学総合研究部・教授

研究者番号：30143952

西田 憲司 (NISHIDA KENJI)

信州大学・大学院共生科学技術研究院・教授

研究者番号：70125392

毛利 出 (MORI IZURU)

静岡大学・理学部・准教授

研究者番号：50436903

吉野 雄二 (YOSHINO YUJI)

岡山大学・大学院自然科学研究科・教授

研究者番号：00135302

和田 俱幸 (WADA TOMOYUKI)

東京農工大学・大学院工学研究院・教授

研究者番号：40003008