

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 22 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究（B）

研究期間：2009 ～ 2012

課題番号：21340005

研究課題名（和文） 複素シンプレクティック多様体の幾何

研究課題名（英文） The geometry of complex symplectic varieties

研究代表者

並河 良典（NAMIKAWA YOSHINORI）

京都大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：80228080

研究成果の概要（和文）：

アファイン複素シンプレクティック多様体とそのクレパント特異点解消を、双有理幾何とポアソン変形の立場から研究した。特に、アファイン複素シンプレクティック多様体のポアソン変形には障害がないことを証明し、クレパント特異点解消の存在とポアソン変形によるスムージングの存在の同値性を示した。また、複素半単純リー環のべき零多様体の特徴付けもおこなった。

研究成果の概要（英文）：

We have studied affine symplectic varieties and their crepant resolutions from the point of view of birational geometry and Poisson deformations.

In particular, we proved that the Poisson deformations of affine symplectic varieties are unobstructed and we furthermore showed that those varieties have crepant resolutions if and only if they can be smoothed by Poisson deformations.

We also gave a characterization of the nilpotent varieties of complex semisimple Lie algebras.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009 年度	1,800,000	540,000	2,340,000
2010 年度	1,600,000	480,000	2,080,000
2011 年度	1,800,000	540,000	2,340,000
2012 年度	1,600,000	480,000	2,080,000
年度			
総計	6,800,000	2,040,000	8,840,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学 代数学

キーワード：複素シンプレクティック多様体 ポアソン変形 双有理幾何 べき零多様体

## 1. 研究開始当初の背景

アファイン複素シンプレクティック多様体で正荷重つき  $C^*$ -作用をもったものおよびその特異点解消が、代数幾何や幾何学的表現論で頻繁に現れる。たとえば、半単純複素リー環のべき零軌道の閉

包やその Springer 特異点解消、これらべき零軌道の適当な横断片をとったもの (Slodowy slice)、中島 quiver 多様体などである。ロシア人数学者 Kaledin は、これらの複素シンプレクティック多様体のポアソン構造に着目し、ポアソン変形の研究をおこなっていた。筆者は、

2008年に Publ. RIMS から出版した論文で、ポアソン変形の理論の基礎づけをおこなったほか、双有理幾何の立場から、ベキ零軌道閉包のクレパント特異点解消の研究をおこなっていた。

複素シンプレクティック多様体においては、変形理論と双有理幾何の間に深い関係があることは経験的に明らかであった。

## 2. 研究の目的

ポアソン変形と双有理幾何を両輪にして、アファイン複素シンプレクティック多様体およびそのクレパント特異点解消の幾何を研究することが目的である。

## 3. 研究の方法

ポアソン変形の理論と双有理幾何の関係が浮き彫りになるような予想を提起し解決する。理論を抽象的に発展させる一方、具体的で **non-trivial** な例にその理論を応用する。シンプレクティック構造は、接触構造と表裏一体の関係にある。シンプレクティック構造を、接触構造の言葉に置き換えることにより、コンパクトな代数多様体にたいする様々な結果を援用する。

## 4. 研究成果

正荷重つき  $C^*$ -作用をもったアファイン複素シンプレクティック多様体  $X$  (特異点つき) のポアソン変形の障害はないことを証明した。さらに  $X$  の  $\mathbb{Q}$ -分解端末化を  $p: Y \rightarrow X$  としたとき、両者のポアソン変形関手の間の射

$$p_*: PD_Y \rightarrow PD_X$$

は有限ガロア群  $W$  をもつ有限被覆であることを示した。また  $C^*$ -作用を使うことにより  $H^2(Y, \mathbb{C})$  および  $H^2(Y, \mathbb{C})/W$  の上に  $Y$  および  $X$  の普遍ポアソン変形を (形式スキームではなく) 代数スキームとして構成した。

これらの構成の系として、 $X$  がクレパント特異点解消をもつことと、 $X$  がポアソン変形でスムージングできることは同値であることがわかる。

2012年度には、複素半単純リー環のベキ零多様体  $N$  の特徴づけをおこなった。結果は以下の通りである：  
特異点をもったアファイン複素シンプレクティック多様体が、アファイン空間内で斉次多項式の完全交差で書けたとする。さらにシンプレクティック形式  $w$

も斉次であると仮定する。このとき、 $(X, w) = (N, w_0)$  である。ここで、 $N$  はある複素単純リー環のベキ零多様体、 $w_0$  は Kostant-Kirillov 形式である。

証明には、ポアソン変形の理論、双有理幾何、接触幾何が用いられる。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 9 件)

[1] Lehn, M., Namikawa, Y., Sorger, C., van-Straten, D.: On symplectic hypersurfaces, to appear in Adv. Stud. Pure Math. 査読有

[2] Namikawa, Y.: Equivalences of symplectic singularities, to appear in Kyoto J. Math. Vol. 53, no. 2 (2013)、査読有

[3] Namikawa, Y.: Birational geometry for nilpotent orbits, in Handbook of Moduli vol III, Advanced Lectures in Math. Vol. 26, International Press (2013) 1-38、査読有

[4] Namikawa, Y.: On the structure of homogeneous symplectic varieties of complete intersection, to appear in Invent. Math. (online published in 2012, 査読有、DOI:10.1007/s00222-012-0424-1)

[5] Lehn, M., Namikawa, Y., Sorger, C.: Slodowy slices and universal Poisson deformations, Compositio Math. Vol 148, (2012) 121-144、査読有  
DOI: 10.1112/S0010437X11005550

[6] Namikawa, Y.: Birational geometry and nilpotent orbits, Sugaku Exposition Vol. 24 (2011) 239-261、査読有

[7] Namikawa, Y.: Poisson deformations of affine symplectic varieties, Duke Math. J. Vol. 156 (2011) 51-85、査読有  
DOI: 10.1215/00127094-2010-066

[8] Namikawa, Y.: Poisson deformations of affine symplectic varieties II, Kyoto J. Math. Vol 50, (2010) 727-752、査読有  
DOI: 10.1215/0023608X-2010-012

[9] Namikawa, Y.: Induced nilpotent orbits

and birational geometry, Adv. Math. Vol. 222, (2009) 547-564、査読有  
DOI: 10.1016/j.aim.2009.05.001

〔学会発表〕(計 15 件)

[1] Fundamental groups of symplectic singularities,  
Workshop on higher dimensional algebraic geometry,  
National Taiwan University, Taipei, Taiwan,  
25, March, 2013

[2] Symplectic varieties of complete intersection and contact geometry,  
Workshop: Higher dimensional algebraic geometry  
(in honour of Kawamata's 60 birthday)  
University of Tokyo, Tokyo, Japan,  
11, Jan. 2013

[3] Symplectic varieties of complete intersection and contact geometry,  
Workshop: Hyper-kähler geometry,  
Simons Center for geometry and physics,  
Stony Brook University, New York, USA  
2, Nov. 2012

[4] Symplectic varieties of complete intersection and contact geometry,  
城崎代数幾何シンポジウム  
城崎大会議館, 兵庫県城崎町  
2012年10月26日

[5] On the structure of homogeneous symplectic varieties of complete intersection,  
Workshop: Singularities,  
Oberwolfach 数学研究所, Germany  
27, September, 2012

[6] Symplectic varieties of complete intersection and contact geometry,  
Workshop: Representation theory and symplectic algebraic geometry,  
CIRS, Luminy, France  
9, July, 2012

[7] Symplectic varieties of complete intersection and contact geometry,  
Workshop: Holomorphic symplectic manifolds and moduli spaces,  
Fourier Institute, Grenoble, France  
12, June, 2012

[8] On the structure of homogeneous symplectic varieties of complete intersection, "Advances in hyperkähler and holomorphic symplectic geometry" Banff, Canada, March 12, 2012

[9] Poisson deformations of affine symplectic varieties,  
"Doctorial Forum of Mathematics between Fudan and Kyoto",  
Fudan Univ. China, Nov. 2, 2011

[10] Slodowy slices and universal Poisson deformations,  
"特異点論とそのひろがり" August 25, 2011

[11] Equivalence of symplectic singularities, "MMP and extremal rays", RIMS, Kyoto Univ, June 23, 2011

[12] Equivalence problems of symplectic varieties, "Derived categories 2011, Tokyo", Univ. of Tokyo, Jan. 25, 2011

[13] Poisson deformations of symplectic varieties, workshop "Complex algebraic geometry" Oberwolfach 数学研究所, Germany, 2009年9月28日

[14] Poisson deformations of symplectic varieties"workshop "Singularities" Oberwolfach 数学研究所, Germany, 2009年9月22日

[15] Poisson deformations and symplectic varieties,  
PRIMA 2009, Sydney, Australia, 2009年7月6日

## 6. 研究組織

### (1)研究代表者

並河 良典 (NAMIKAWA YOSHINORI)  
京都大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号：80228080

### (2)研究分担者

無し

( )

研究者番号：

(3)連携研究者  
無し

( )

研究者番号：