

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 16 日現在

機関番号：32601

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2009～2013

課題番号：21340006

研究課題名(和文) 旗多様体上の軌道とモーメント写像

研究課題名(英文) Orbits on flag varieties and moment maps

研究代表者

西山 享(Nishiyama, Kyo)

青山学院大学・理工学部・教授

研究者番号：70183085

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 12,800,000円、(間接経費) 3,840,000円

研究成果の概要(和文)：数学における対称性は群によって記述されることが多い。大きな対称性を持つものは「大きな」群の作用を持ち、一般的に「美しい」。特に大きな対称性を持つものの中に等質空間があるが、対称群が簡約代数群であって、コンパクトなものは旗多様体と呼ばれる。本研究では、旗多様体上の群軌道を、シンプレクティック幾何学の道具であるモーメント写像を用いて研究した。有限型の二重旗多様体を多数構成し、理想的な場合には、その分類に成功したことは大きな成果である。また実簡約代数群の既約ユニタリ表現の随伴多様体に対し、連結成分である冪零軌道が余次元1の連結性を持つような極大な既約表現を構成するなどの結果も得られた。

研究成果の概要(英文)：In mathematics, symmetry is often described by group actions. If the symmetry group is large, the symmetry is considered to be big and "beautiful". One of the most beautiful object in this sense is a homogeneous variety. If the symmetry group is a reductive algebraic group and the homogeneous space is compact, it is called a flag variety. In this research, we studied various orbits on flag varieties using moment maps. Main results are the followings. (i) We constructed many double flag varieties of finite type, and in good cases, we succeeded in classification of such varieties. (ii) For an irreducible unitary representation of a real reductive group, one can consider an associated variety. We defined codimension one connectedness among nilpotent orbits, and constructed irreducible representations whose associated varieties are maximally connected in codimension one.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：代数群 軌道 旗多様体 対称空間 冪零多様体 モーメント写像 余接束多様体 球作用

1. 研究開始当初の背景

研究の開始時には、Steinberg による二重旗多様体と Travkin, Finkelberg, Ginzburg による三重旗多様体の理論があったが、対称空間に付随した二重旗多様体の理論は皆無であった。またハリシュ・チャンドラ加群との関係や随伴多様体に関する研究もまだ十分とは言えない状態であった。

面白いことに、加藤周によるエキゾチック冪零錐の理論や Achar-Henderson による enhanced 冪零錐の理論など、対称対の旗多様体に付随した冪零錐は(いま振り返って考えてみると)出現しつつあった。

2. 研究の目的

実リー群のユニタリ表現論には複素代数群の対称対が大きな役割を果たしており、特に旗多様体や冪零多様体の幾何学は豊かな内容を含んでいる。一方において、対称対に付随した旗多様体や冪零多様体についてはまだまだ知られていないことが多すぎるので、本研究ではシンプレクティック幾何学の手法やモーメント写像を用いることで、対称対に付随する幾何学の基礎的な理論を構築することを目指した。

短期的な目標は、対称対の二重旗多様体上の K 軌道を理解することであり、特に軌道が有限個になる場合(有限型の二重旗多様体)を分類することが重要であった。

中・長期的には旗多様体上の K 軌道の幾何学とそのモーメント写像による像である冪零錐の幾何学、そして、究極の目標であるハリシュ・チャンドラ加群の随伴多様体の構造を理解することを考えていた。

3. 研究の方法

対称対を (G, K) と書くとき、対称対に付随する旗多様体とは $X = K/Q \times G/P$ のことである。ここに Q は K の放物型部分群で P は G の放物型部分群である。本研究では、 X 上の K 軌道の有限性を三重旗多様体や球作用に帰着することによって研究し、そのモーメント写像による像である冪零多様体の性質を組合せ論的な手法、および Steinberg-Richardson-Springer 理論を用いて研究した。具体的には余接束や余法束多様体、そして冪零軌道の閉包関係から決まる余次元 1 の連結性を道具として用いた。

三重旗多様体の理論や Magyar, Weymann, Zelevinsky による分類、そして Stembridge による球的な二重旗多様体の分類、Benson-Ratcliff による球表現の分類などを道具として使うことにした。

また冪零軌道の構造は、太田琢也によって非常に詳しく研究されており、太田の理論を我々の場合に翻訳して使用した。

4. 研究成果

研究成果の主なものを箇条書きにして列挙する。

(i) 対称対の二重旗多様体を定義して、有限型の二重旗多様体を多数構成した。特に有限型の三重旗多様体へと帰着する理論はこの後の研究に重要になると考えられる。

(ii) 対称対の二重旗多様体で有限型のもの、 Q または P がボレル部分群の場合に分類した。 Q がボレルのときには、これは K の作用に関する球旗多様体 G/P の分類と同値であるが、このような球等質多様体については様々な研究があり、我々の結果はいわば決定版と言えるものである。また P がボレルのときには、我々の分類は、 G の作用に関する球等質空間 G/Q の分類と等価である。このような球等質空間の例はあまり知られていなかったので、そのような例を多数構成し、分類したことの意義は大きいと考えている。

(iii) 冪零軌道の中に余次元 1 の連結性によるグラフ構造を定義し、そのグラフの構造を決定した。実リー群 $U(p, q)$ に対して、グラフの連結成分に対応する冪零軌道を随伴多様体として持つ既約ユニタリ表現の構成に成功した。このような概念は Vogan によって提唱されていたが、決定的な結果を得たのは我々の研究を嚆矢とするものである。これに関しては、半単純軌道の漸近錐という観点からもアプローチができ、偶冪零軌道の場合には、随伴多様体が漸近錐として得られることも示した。

(iv) 二重旗多様体の有限性に関して、 G の二つの放物型部分群の相対的位置関係に着目し、ある種の非常によい関係を持つ場合を分類した。これは意外なことに対称空間がエルミート対称空間であることの特徴付けになることが判明した。

(v) 旗多様体上の正則軌道とシュプリンガー対応に付随する幾何学と組合せ論の関係を明らかにすることができた。これによって、対称対の場合のシュプリンガー・ファイバーとシュプリンガー表現の間の関係が明瞭になった。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 8 件)

1. Kensuke Kondo, Kyo Nishiyama, Hiroyuki Ochiai and Kenji Taniguchi
「Closed orbits on partial flag varieties and double flag variety of finite type」

Kyushu J. Math., Vol.68 no.1 (2014), 113—119, 査読有.

2. Xuhua He, Kyo Nishiyama, Yoshiki Oshima, Hiroyuki Ochiai. 「On orbits in double flag varieties for symmetric pairs」 Transformation Groups, 18 巻 (2013), No.4, pp.1091-1136, 査読有.

3. Dan Ciubotaru, Kyo Nishiyama, Peter Trapa 「Regular orbits of symmetric subgroup on partial flag varieties」 Birkhauser, Boston, pp.61-86, 査読有, 2012.

4. Kyo Nishiyama, Ochiai Hiroyuki 「Double Flag Varieties for a Symmetric Pair and Finiteness of Orbits」 Journal of Lie Theory 21 巻 1 号, 査読有, 2011.

5. Kyo Nishiyama, 「Asmpotic cone of semisimple for symmetric pairs」 Adv. Math., 226 巻, 4338-4351, 査読有, 2011.

6. 西山 享 (Kyo Nishiyama) 「漸近錐と退化主系列表現」 RIMS 別冊 20 号, 1-20, 査読有, 2010.

7. 西山 享 (Kyo Nishiyama) 「行列の計算では $XX=YY$ にならないのはなぜか？」数学セミナー 6 月号, 22-27, 査読無, 2010/6.

8. 西山 享 (Kyo Nishiyama) 「群が有限になるところ/鏡映群をめぐって」 数学セミナー 9 月号, 査読無, 23-27, 2012.

〔学会発表〕 (計 10 件)

1. 西山 享 (Kyo Nishiyama) 「Conormal variety over double flag varieties and exotic nilpotent cone」 MFO (オーベルホルフアッハ数学研究所), 2014/1, MFO (ドイツ).

2. 西山 享 (Kyo Nishiyama) 「On K-spherical flag varieties」 Atlas Conference: Representations of Reductive Groups, 2013/7, Univ. Utah (米国).

3. 西山 享 (Kyo Nishiyama) 「Double flag varieties and spherical actions」 Orbits, Primitive Ideals and Quantum Groups, 2013/3, Univ. of Haifa (イスラエル).

4. 西山 享 (Kyo Nishiyama) 「Orbit graphs of associated varieties」 (CBMS 2012: Unitary Representations of Reductive Groups) 2012/7, Univ. Massachusetts, Boston (米国).

5. 西山享 (Kyo Nishiyama) 「On orbit graph of Harish-Chandra modules」 (2012 Nankai International Workshop on Representation Theory and Harmonic Analysis), 2012/6, 南開大学 (中国).

6. 西山 享 (Kyo Nishiyama) 「Multiple flag varieties and spherical actions」 Branching Laws, 2012/3, シンガポール国立大学 IMS (シンガポール).

7. 西山 享 (Kyo Nishiyama) 「Double flag varieties for symmetric pairs」 (Max-Planck Institute for Mathematics Analysis on Lie Groups) 2011/9, MPI Lecture Hall (ドイツ).

8. 西山 享 (Kyo Nishiyama) 「Finiteness of orbits on double flag varieties for symmetric pairs」 Functinal Analysis XII—Representation Theory—, 2011/6, IUC Dubrovnik, Croatia (クロアチア).

9. 西山 享 (Kyo Nishiyama) 「Multiple flag varieties of finite type for symmetric pairs」 Workshop on Geometry and Representation Theory, 2011/1, シンガポール国立大学 IMS (シンガポール).

10. 西山 享 (Kyo Nishiyama) 「Steinberg variety and moment maps over multiple flag varieties I, II」 2010 Nankai International Conference and Summer School on Representation Theory and Harmonic Analysis, 2010/6, 南開大学 (中国).

〔図書〕 (計 3 件)

1. 西山 享 「射影幾何学の考え方」 共立出版, 225p, 2013.

2. 西山 享 「幾何学と不変量」 日本評論社, 276p, 2012.

3. 西山 享 「重点解説 ジョルダン標準形-行列の標準形と分解をめぐって-」 臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリー, サイエンス社, 152p, 2010/10.

〔産業財産権〕

○出願状況 (計 0 件)

名称 :

発明者 :

権利者 :

種類 :

番号 :

出願年月日 :

国内外の別 :

○取得状況（計 0 件）

研究者番号：90214163

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

西山 享 (Kyo NISHIYMA)
青山学院大学・理工学部・教授

研究者番号：70183085

(2) 研究分担者

和地 輝仁 (Akihito WACHI)
北海道教育大学・教育学部・准教授

研究者番号：30337018

(3) 研究分担者

増田 哲 (Tetsu MASUDA)
青山学院大学・理工学部・准教授

研究者番号：00335457

(4) 研究分担者

川上 拓志 (Hiroshi KAWAKAMI)
青山学院大学・理工学部・助教

研究者番号：00646854

(5) 研究分担者

松本 久義 (Hisayosi Matumoto)
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：50272597

(6) 研究分担者

山下 博 (Hiroshi Yamashita)
北海道大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：30192793

(7) 研究分担者

落合 啓之 (Hiroyuki Ochiai)
九州大学・マスフォアインダストリ研究所・教授