

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 1 日現在

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2009～2013

課題番号：21340009

研究課題名(和文) ガロア・タイヒミュラー被覆塔をめぐるモジュライ空間と数論

研究課題名(英文) Arithmetic and Moduli Spaces around Galois-Teichmüller tower

研究代表者

中村 博昭 (Nakamura, Hiroaki)

大阪大学・理学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：60217883

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 12,700,000円、(間接経費) 3,810,000円

研究成果の概要(和文)：数論と代数幾何学の交錯する豊かな理論が期待されている分野として、遠アーベル幾何学を推進し、とりわけ代数曲線とそのモジュライ空間から生じる数論的基本群の系列がなすガロア・タイヒミュラー被覆塔について国際研究交流を推進した。特に2010年の10月に京都大学数理解析研究所で第3回日本数学会季期研究所を開催し、その研究成果を論文集「Galois-Teichmüller theory and Arithmetic Geometry」として出版した。また無限遠を除いた楕円曲線の数論的基本群から生じるモノドロミー表現について研究を進め論文発表を行った。

研究成果の概要(英文)：In this project, researches on anabelian geometry have been developed with rich prospects for number theory and algebraic geometry. In particular, promoted were international interactions of arithmetic researches concerning Galois-Teichmüller tower formed by fundamental groups of algebraic curves and their moduli spaces. In October 2010, we realized the 3rd Seasonal Institute Conference of Mathematical Society of Japan in Kyoto University, and subsequently in October 2012 we published the proceedings volume "Galois-Teichmüller theory and Arithmetic Geometry". Besides, a certain monodromy invariant arising from fundamental groups of once-punctured elliptic curves was studied and research papers on it have been published.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：数論幾何学 モジュライ空間 基本群 遠アーベル幾何

1. 研究開始当初の背景

基本群がアーベル群から程遠い『遠アーベル的』と称される数論的代数幾何学の状況においては、その幾何学を統制するほどの豊かな群論的構造がエタール基本群の中に現れるという期待が A.Grothendieck により提唱されて以来、多くの成果が上がってきているが、『section 予想』と呼ばれる、有理点からガロア基本群の中に生じる分裂切断(section)の特徴づけに関する問題をはじめ未解決の課題も少なくない。代数曲線のモジュライ空間の基本群として得られるガロア・タイヒミュラー群塔はその豊かな構造が注目され、欧米や日本を中心に国際的な研究ネットワークが形成されつつあった。この中で日本では1980年代より伊原康隆氏を中心とした数論研究者グループによる先進的な位置づけが継承されていた。こうした研究ネットワークの形成と我が国の先進性をより強固かつ堅実なものとするため、平成22年度に筆者を組織委員長として第3回日本数学会季期研究所(MSJ-SI)国際集会「ガロア・タイヒミュラー理論と遠アーベル幾何の展開」の開催が予定され、国際的に著名な研究者の招聘に向けた準備が進められていた。

2. 研究の目的

タイヒミュラー群との関わりという観点からは、位相幾何学で知られている Dehn 捻りによる生成元と関係式に対して、有理数体の絶対ガロア群 $G(Q)$ がどのように明示的に作用するか、という問題についても、モジュライ空間の無限遠に由来するガロア・タイヒミュラー塔に関して筆者と Schneps の共同研究により一定の解決を見ていた。特に、Drinfeld, 伊原康隆により導入された Grothendieck-Teichmueller 群 GT の概念が精密化され、ガロア群の作用の記述として、タイヒミュラー群の位相幾何的生成元のガロア変換を、絶対ガロア群 $G(Q)$ の各元の標準座標とみなした GT の主要パラメータにより記述する方法が確立された。このような背景の中で、また GT の主要なパラメータが絶対ガロア群の上でどのような数論的振る舞いをするかという問題、ガロア・タイヒミュラー塔の記述において、無限遠因子のみでなく、対称性の高い代数曲線を束ねているモジュライ空間の特殊跡に由来する射を含めた、より精緻なガロア・タイヒミュラー塔に対して、ガロア群の作用はどのように記述されるか、といった問題に対しても、多くのアプローチがなされている。しかしながら全体像を得るための道筋が依然として不明確な状況が続いている。本研究課題は、国際研究集会の開催や関連する国際交流を通じてこれらの課題の解決に向けたアプローチを展開することを目的としている。

3. 研究の方法

楕円曲線マイナス1点の基本群に生じるガロア表現(ないしモノドロミー表現)に対して、射影直線マイナス3点の基本群における伊原級数(普遍ヤコビ和級数)の類似を構成する問題に取り組む。このために平成21年度は、Newton 研究所で、“Non-Abelian Fundamental Groups in Arithmetic Geometry” に Visiting Fellow として参加して、最新の研究動向に関する情報を収集するとともに、新成果を発表して活躍している多くの研究者との交流を実現する。

平成22年度に筆者を組織委員長として主催が決まっている第3回日本数学会季期研究所(MSJ-SI)国際集会「ガロア・タイヒミュラー理論と遠アーベル幾何の展開」の成功のためにエネルギーを集中させる。Co-organizer として、京都大学数理解析研究所の玉川安騎男教授と、フランス数学者 L. Schneps 女史、アメリカ数学者の F. Pop 教授の協力承諾を得て、次世代につながるような主要な研究者との国際交流も実現する。この国際集会のあとは、査読つき概説・研究論文の報告集を、日本数学会の A S P M のシリーズから刊行する。その経緯と結果を基点として、課題に関連したさらなる学術展開を育み推進する。

4. 研究成果

平成21年度は7月~12月にかけてケンブリッジのニュートン数理解析研究所のプロジェクト研究“Non-Abelian Fundamental Groups in Arithmetic Geometry (NAG)”に参加し、研究打合せや情報収集するとともに、長年の懸案であった楕円曲線マイナス1点の基本群に生じるガロア表現(ないしモノドロミー表現)に対して、射影直線マイナス3点の基本群における伊原級数(普遍ヤコビ和級数)の類似を構成する問題に一定の結論をまとめることに成功した。この問題の萌芽は1984年の S. Bloch の示唆(Deligne への手紙)に発祥し、これを継承した1990年代前半の角皆宏・筆者の研究(いずれも1995年に発表)を発展させることにあり、今回のポイントは、これまで楕円曲線の定義体に無限個の等分点の座標を添加した体の上でしか定義できなかった級数表現を、楕円曲線の定義体そのものの上に降下する自然な関数の系列を導入し定量的にアプローチする手段を確立した点にあり、とりわけこれらの明示公式を1995年の筆者の論文の公式を精密化する形で拡張できた点にある。このことから複素普遍楕円曲線のモノドロミー表現に適用することで、一般デデキント和との関連も明らかにすることが出来た。以上の成果は、“On arithmetic monodromy representations of Eisenstein type in fundamental groups of once punctured elliptic curves”というブ

レプリントにまとめ、京都大学数理解析研究所の Preprint Series (RIMS-1691)として発表した。またケンブリッジでは、とりわけ F. Pop, L. Schneps と綿密な打合せをして、京都大学の玉川安騎男氏・星裕一郎氏とともに企画する 2010 年 10 月に予定している研究集会および合宿型セミナーのための準備を進めることが出来た。また年度末には、研究分担者の角皆氏と岡山大学において研究打合せを実施し、筆者と角皆氏と安田正大氏との遠アーベル幾何に関する共同研究において重要な役割を果たしたカルダノ・フェラーリ写像の一般化に向けた情報収集について報告していただいた。

平成 22 年度は、いよいよ課題に関係する未解決の予想や新たな問題をめぐる国際的な全貌を総括する機会として、日本が指導的存在である遠アーベル予想とグロタンディーク・タイヒミュラー理論に関する国際研究集会である「第三回日本数学会季期研究所」を研究代表者として開催する運びとなった。この一環として 10 月の連続企画—京都大学数理解析研究所合宿型セミナー「Galois-Theoretic Arithmetic Geometry」(October 19-24, 2010)および RIMS 研究集会 & 第 3 回日本数学会季期研究所「Development of Galois-Teichmüller theory and Anabelian Geometry」(October 25-30, 2010)—の成功に向けた準備に主力を傾注した。その甲斐もあり、多くの海外からの来訪者と国内からの研究者を若手からベテランまでの幅広い世代から参加していただくことが出来て、学術的に意義深い国際交流が実現できた。後半は、研究集会で得た多くの情報の分析と報告集の編集のための下準備を行った。また代数計算ソフトを利用して、写像類群の次数加群に現れるシンプレティック群と対称群の表現分解について以前の結果を更新する作業を行った。前年度に引き続き、1 進 polylog の関数等式の精密化や楕円曲線マイナス 1 点の基本群から生じる Eisenstein 型不変量の振る舞いの性質の研究を進めた。

平成 23 年度は引き続き、数論的基本群をめぐる様々な不変量記述の精密化を進めた。楕円曲線マイナス 1 点の基本群から生じるアイゼンシュタイン型不変量については、合同周期性というべき性質として値の合同類を与える法にレベルを乗じた平方周期性が存在することを証明する論文を“Some congruence properties of Eisenstein invariants associated to elliptic curves”のタイトルでまとめた。写像類群のモノドロミー像の余核に関しては、上智大学の角皆宏氏と京都大学の高尾尚武氏と共同研究を進め、引き続き継続している。この中で森田トレースの安定性についての結果を得た。また種数 0 の場合のモノドロミー像の対称群作用での表現を、計算代数システムを用いて計算するアルゴリズムを確立し、高次数まで計算を進めた。

この過程で対称群の表現については、様々な局面で一般にヤング図形の第 2 腕以下の形についての安定性が存在することが確かめられた。ニース大学の Wojtkowiak 氏とは、エル進ポリログ関数の関数等式について共同研究を進めるとともに、対数的エル進アソシエーターの展開係数の様子について新たな問題意識を共有し、データの分析を進めた。以上の進展は、本課題が目指すガロア・タイヒミュラー塔から生じる深い数論性を取り出して制御する理論の裾野と展望をさらに広げる可能性がある。今年度は、このほか前年度に主催した二つの研究集会、京都大学数理解析研究所合宿型セミナー「Galois-Theoretic Arithmetic Geometry」(October 19-24, 2010)および第 3 回日本数学会季期研究所「Development of Galois-Teichmüller theory and Anabelian Geometry」(October 25-30, 2010)のプロシーディングス論文集の編集を開始し、おおむね順調に経緯した。

平成 24 年度は、上述のプロシーディングス論文集“Galois-Teichmüller theory and Arithmetic Geometry”が 10 月に日本数学会の Advanced Studies in Pure Mathematics のシリーズの 63 巻として刊行された。また楕円曲線マイナス 1 点の基本群におけるモノドロミー表現に関する論文“On arithmetic monodromy representations of Eisenstein type in fundamental groups of once punctured elliptic curves”に関するレフェリーの助言を参考に改訂を行い、最終的に Publ. RIMS, Kyoto University 誌から査読完了と掲載受理の通知を受け取った。この論文で定式化した不変量の応用に向けた情報収集を引き続き行うために、英国ケンブリッジのニュートン研究所におけるプログラム“Grothendieck-Teichmüller Groups, Deformation and Operads (GDO)”に 2 月下旬～3 月末の間に参加して参考とすべき収穫を得た。これに先立って 11 月初頭における分担者の角皆氏との岡山大学での打合せに続いて、同月から 12 月にかけてフランスのリール大学の P. Debes 氏を訪問して、曲線の被覆の定義体降下の手法に関する彼と J.-C. Douai 氏との共同研究について意見交換を交わすことが出来た。

平成 25 年度は論文“On arithmetic monodromy representations of Eisenstein type in fundamental groups of once punctured elliptic curves”が、Publ. RIMS, Kyoto Univ. から出版され、成果発表に区切りがついたとともに、ここで確立した楕円曲線の不変量の幾何学的解釈や拡張・深化に向けた考察に取り組んだ。年度途中で岡山大学から大阪大学への研究拠点の移転を挟む中で、2 次形式論との関連性に注目し、将来の方向性を模索する活動を開始した。そうした中で 2 次形式の整数論の研究で著名なジョンズホプキンス大学の小野孝名誉教授を

迎え、2013年12月21日～23日の日程で大阪大学中之島センターにて、研究集会「Modular functions and Quadratic forms」を木田雅也氏(東京理科大)、森下昌紀氏(九州大)、Ken Ono氏(エモリー大学)、渡部隆夫氏(大阪大)とともに企画開催し、斯界の若手から重鎮に至る幅広い世代の研究者による講演発表のプログラムを実施した。その結果、課題に関係する重要な研究動向について知見を深めるとともに近年進展の著しいラマヌジャンのモックテータ関数とマース形式をキーワードにした最先端の研究も紹介された。同時に当該課題の延長線上に望まれる将来の研究の方向性がいくつか示唆されたとともに、隣接分野の参加者同士の活発な研究交流が実現され有意義な集会となった。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 7 件)

1. H. Nakamura “On arithmetic monodromy representations of Eisenstein type in fundamental groups of once punctured elliptic curves”
Publ. RIMS, Kyoto University. 49 (2013), 413--496. (査読有)
2. N. Kanesaka, H. Nakamura, “On hyperbolic area of the moduli of θ -acute triangles”
Math. J. Okayama Univ. 55 (2013), 191--200. (査読有)
3. H. Nakamura “Some congruence properties of Eisenstein invariants associated to elliptic curves” in “Galois-Teichmüller theory and arithmetic geometry”,
Advanced Studies in Pure Math. 63 (2012), 813--832. (査読有)
4. H. Nakamura “On Galois rigidity of fundamental groups of algebraic curves” in “Nonabelian Fundamental Groups and Iwasawa Theory”
(J. Coates, M. Kim, F. Pop, M. Saidi, P. Schneider eds.)
London Math. Soc. Lecture Note Series, 393 (2012), 56--71
(Cambridge UP). (査読有)
5. H. Nakamura, Z. Wojtkowiak “Tensor and homotopy criteria for functional equations of l -adic and classical iterated integrals”
in “Nonabelian Fundamental Groups and Iwasawa Theory”

(J. Coates, M. Kim, F. Pop, M. Saidi, P. Schneider eds.)
London Math. Soc. Lecture Note Series, 393 (2012), 258-310
(Cambridge UP). (査読有)

6. H. Nakamura, H. Tsunogai, S. Yasuda
“Harmonic and equianharmonic equations in the Grothendieck-Teichmüller group, III”
Journal Inst. Math. Jussieu 9 (2010), 431-448. (査読有)

7. K. Hoshino, H. Nakamura “Belyi function on $X_0(49)$ of degree 7”
Appendix to: K. Hoshino “The Belyi functions and dessin d'enfants corresponding to the non-normal inclusions of triangle groups”
Math. J. Okayama Univ. 52 (2010), 61--63. (査読有)

[学会発表] (計 10 件)

1. H. Nakamura “On arithmetic Dehn-Nielsen mapping”,
Number Theory Seminar, University of Nottingham,
March 20, 2013. 招待講演
2. H. Nakamura, “On some arithmetic monodromy invariant for once punctured torus, Workshop “Low dimensional topology and number theory IV” (organizer: Masanori Morishita), Kyushu University, Fukuoka, March 12-15, 2012. 招待講演
3. H. Nakamura, “Ascending a tower of Galois-Teichmüller in higher genera”,
Seminaire “Arithmétique et Topologie” a Lille,
Laboratoire Paul Painlevé, Université Lille 1,
November 29, 2012. 招待講演
4. H. Nakamura
“An introduction to moduli spaces related to elliptic curves”,
Heilbronn Institute for Mathematical Research, Univ. of Bristol,
May 2, 2011. 招待講演
5. H. Nakamura
“Arithmetic invariants related to Eisenstein series arising from meta-abelian monodromy representations of once punctured elliptic curves”,
Workshop on Multiple Zeta Values, Modular Forms and Elliptic Motives, (organized by Herbert Gangl, Richard Hain, Owen Patashnick),

Heilbronn Institute for Mathematical Research, Univ. of Bristol,
May 3--6, 2011. 招待講演

6. H. Nakamura, "On fundamental groups of once punctured elliptic curves", Seminar "Theorie de Galois et methodes explicites" at

Laboratoire Paul Painleve, Lille University, March 23, 2010 招待講演

7. H. Nakamura, "On an elliptic analogue of Ihara's power series", Workshop "Geometric and differential Galois theory", C. I. R. M., Luminy, March 29-April 2, 2010. 招待講演

8. H. Nakamura "Galois analogue of functional equations of polylogarithms", Workshop "The Arithmetic of Fields", Oberwolfach, Germany, February 2-6, 2009 招待講演 (Oberwolfach Reports 6 (2009), p. 330 査読なし).

9. H. Nakamura "Computing functional equations of l-adic polylogarithms on Galois group", Workshop "Anabelian Geometry", Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, Cambridge UK, August 24-28, 2009. 招待講演

10. H. Nakamura "Arithmetic invariants of Eisenstein type arising from fundamental groups of once punctured elliptic curves", "Final workshop" of Programme "Non-Abelian Fundamental Groups in Arithmetic Geometry" Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, December 14--18, 2009. 招待講演

[図書] (計 1 件)

H. Nakamura, F. Pop, L. Schneps, A. Tamagawa (eds.) "Galois-Teichmüller theory and Arithmetic Geometry", Advanced Studies in Pure Mathematics Vol. 63, Mathematical Society of Japan. ISBN: 9784864970143 (2012)

[その他]

ホームページ等

<http://www.math.sci.osaka-u.ac.jp/~nakamura/index.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

中村 博昭 (NAKAMURA Hiroaki)
大阪大学大学院理学研究科・教授
研究者番号：60217883

(2) 研究分担者

角皆 宏 (TSUNOGAI Hiroshi)
上智大学・理工学部・教授
研究者番号：20267412
(平成25年度より連携研究者)

石川 佳弘 (ISHIKAWA Yoshihiro)
岡山大学大学院自然科学研究科・助教
研究者番号：50294400
(平成22年度より連携研究者)

玉川 安騎男 (TAMAGAWA Akio)
京都大学数理解析研究所・教授
研究者番号：00243105
(平成22年度以外は連携研究者)

渡部 隆夫 (WATANABE Takao)
大阪大学大学院理学研究科・教授
研究者番号：30201198
(平成25年度のみ)

(3) 連携研究者

望月 新一 (MOCHIZUKI Shinichi)
京都大学数理解析研究所・教授
研究者番号：10243106

松本 眞 (MATSUMOTO Makoto)
広島大学大学院理学研究科・教授
研究者番号：70231602

徳永 浩雄 (TOKUNAGA Hiroo)
首都大学東京理工学研究科・教授
研究者番号：30211395

古庄 英和 (FURUSHO Hidekazu)
名古屋大学多元数理科学研究科・准教授
研究者番号：60377976

星 裕一郎 (HOSHI Yuichiro)
京都大学数理解析研究所・講師
研究者番号：50456761

角皆 宏 (TSUNOGAI Hiroshi)
上智大学・理工学部・教授
研究者番号：20267412

石川 佳弘 (ISHIKAWA Yoshihiro)
岡山大学大学院自然科学研究科・助教
研究者番号：50294400

玉川 安騎男 (TAMAGAWA Akio)
京都大学数理解析研究所・教授
研究者番号：00243105