科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ６ 月 １６ 日現在

機関番号：３２６１２
研究種目：基盤研究(B)
研究期間：2009～2013
課題番号：２１３４００１２

研究課題名（和文）岩澤理論の新展開とその応用

研究課題名（英文）New development of Iwasawa theory and its applications

研究代表者
栗原　将人（KURIHARA, Masato）

慶應義塾大学・理工学部・教授

研究者番号：４０２１１２２１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　8,000,000円、（間接経費）　2,400,000円

研究成果の概要（和文）：一般のp進表現に関する岩澤理論の精密化について研究した。特に、有理数体上に定義された楕円曲線に対して、pを通常還元を持つ素数とするときに、岩澤主予想とp進高さペアリングの非退化性を仮定して、Selmer群のp成分に関する構造定理を得た。この構造定理では、モジュラー記号から決まる解析的な量によって、Selmer群のabel群としての構造が完全に記述される。また、Gauss和型のEuler系、Kolyvagin系の理論を構築した。
　また、CM拡大において、Stickelberger元がイデアル類群の双対のFittingイデアルに入るかどうかという問題について、理論的、数値的に研究を行った。

研究成果の概要（英文）：We studied and obtained a refinement of the usual Iwasawa theory for general p-adic representations. In particular, for an elliptic curve over the rational number field with good ordinary reduction at p, assuming the main conjecture and the non-degeneracy of the p-adic height pairing, we proved a structure theorem for the p-component of the Selmer group of the curve. This theorem describes the structure of the Selmer group as an abelian group by analytic elements which come from modular symbols, so from the L-values. We also constructed a theory of Euler system and Kolyvagin system of Gauss sum type.
For a CM-extension, we studied both theoretically and numerically a problem that the Stickelberger element is in the Fitting ideal of the dual of the ideal class group.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：整数論　セルマー群　イデアル類群　岩澤理論

１．研究開始当初の背景

岩澤理論の中核をなすのは、いわゆる岩澤主予想と呼ばれる関係である。この関係を簡潔に述べると、イデアル類群などの数論的に非常に重要な群への Galois 群の作用から決まる特性多項式が、p 進 L 関数という p 進解析的なゼータ関数と一致する、というものである。この予想は、上記のイデアル類群の場合には、Mazur と Wiles により 1980 年代に最終的に解決された。その後、岩澤理論ではイデアル類群以外の重要な対象、たとえば楕円曲線の Selmer 群やモチーフに伴う p 進表現のコホモロジーに岩澤理論を一般化しようという研究がなされてきたが、そのときの指導原理は常にこの岩澤主予想であった。我々は今までの研究により、イデアル類群や Selmer 群などの Galois 群の作用をこめた加群の構造を、岩澤主予想よりも詳しい精密な形で、ゼータ関数もしくは p 進ゼータ関数から取り出せることを発見し、イデアル類群の場合に証明することにも成功した。すなわちイデアル類群と p 進ゼータ関数の間には、今まで考えられていたより深い関係が存在するのである。またこの精密化は、Zp 拡大の基礎体という一番簡単な場合に適用すると、(虚 Abel 体の場合には) Kolyvagin と Rubin によるイデアル類群の構造定理と一致している。すなわち、われわれのこの結果は Kolyvagin Rubin による有名な構造定理の膨大な一般化と考えることもできる。このような精密化を、さらに一般のモチーフに伴う Galois 表現に対しても定式化するなど整理、発展させることがこの研究の目的の一つである。また、この研究を進めていく過程で、今まで知られていた Euler 系(円単数や加藤和也による楕円曲線の Euler 系)とは異なる新しい型の Euler 系の理論が生まれてきた。また、Mazur や Rubin が考察したものとは異なる Kolyvagin 系の理論も生まれてきた。これらに対する詳しい研究(たとえばその具体的構成)は非常に重要な課題であると思われ、この研究の重要な目的の一つである。

次に通常還元でない素数に対する岩澤理論について述べる。70 年代に Abel 多様体に対する岩澤理論が Mazur によって提唱されてからずっと、p 進表現に対する岩澤理論は、常に通常還元という条件をつけて研究されてきた。しかし、われわれはこれまでの研究において、この条件をはずし、超特異還元をもつ楕円曲線に対し、その Tate Shafarevich 群が有理数体の円分 Zp 拡大でどのように増大していくかを記述することに成功した。その後、小林真一と R. Pollack により、この場合にも通常還元と同じような形で、すなわち岩澤代数上で、岩澤主予想が定式化できることが示された。このように通常還元でない素数に関しても、新しい観点からの岩澤理論がいろいろと発展してきているので、この方面の理論をさらに発展させたいと考える。

２．研究の目的

岩澤理論は最近めざましい発展をしてきている。この研究の目的は、岩澤理論のこのような新しい発展をふまえて、岩澤理論に関するさまざまな観点から新理論を構築することである。具体的には、岩澤主予想を精密化した新しい定式化による岩澤理論を構成することがこの研究の中心課題である。

具体的には、研究の背景でも書いたように、岩澤主予想の精密化に関する我々の結果を一般の p 進表現に一般化すること、新しい型の Euler 系(Gauss 和型の Euler 系)と新しい型の Kolyvagin 系(Gauss 和型の Kolyvagin 系)の理論を発展させること、通常還元を持たない Abel 多様体の岩澤理論をさまざまな面から発展させることが、当初考えた目的であった。

３．研究の方法

前述のように、岩澤主予想の精密化に関する我々の結果を一般の p 進表現に一般化するために、新しい型の Euler 系(Gauss 和型の Euler 系)と新しい型の Kolyvagin 系(Gauss 和型の Kolyvagin 系)の理論を発展させていくこと、そして、まず円分 Zp 拡大上の Selmer 群や p 進表現に関する cohomology 群などの整数論的に重要な対象物を Galois 群が作用する Galois 加群と見て、その Fitting イデアルを高次の Fitting イデアルもこめて、p 進ゼータ関数などの p 進解析的な対象でどの程度表せるかを研究する。普通の岩澤理論では、最も簡単な設定でも 0 次の Fitting イデアルしか考えていないが、ここでは一般の高次の Fitting イデアルが対象である。簡単に言うと、これらの情報を得ることは、整数論的に重要な加群に対して、特性多項式や群の位数以上のもっと詳しい Galois 加群としての構造に関する情報をゼータ関数から引き出すことを意味する。

４．研究成果

(1) まずは、イデアル類群について得ていた構造定理(Masato Kurihara, On the structure of ideal class groups of CM-fields, Documenta Mathematica, Extra Volume Kato (2003), 539-563)の類似の定理を、階数が 0 の楕円曲線の Tate Shafarevich 群に拡張した。

E を有理数体上に定義された楕円曲線、L 関数の s=1 での値が 0 ではないと仮定する。また、p は良い還元をもち、通常還元を持つ素数であると仮定する。さらに E の p での岩澤主予想(既にかなりの場合に Skinner と Urban により証明されている)を仮定する。このとき、E の有理数体上の Tate Shafarevich 群の p 成分は有限であることが知られている。われわれが問題とするのは、そのアーベル群としての構造である。われわれは、このアー

ベル群としての構造が、L 関数から決まる情報で、決定されることを証明した。

もう少し詳しく述べる。我々の定理はイデアル類群の場合の定理とは、形が異なる。つまり、イデアル類群の場合の類似の定理がそのまま成り立つわけではない。有理数体の有限次アーベル p 拡大の L 関数の値(この体の Galois 群の指標χに対して L(E,χ,1)から決まるある元が高次 Fitting イデアルに入ることを証明した。もう少し正確に書くと、n を良い還元を持つ素数の平方因子なしの積とすると、1 の n 乗根の体の部分体からδn という元が作れるのだが、n を割る素数の数を i とするとき、δn は、E の有理数体上の Tate Shafarevich 群の i 次 Fitting イデアルに入ることを証明した。そこで、この i 次 Fitting イデアルが、これらの元δn で生成されるか、ということが問題になるが、このことについて次の定理を証明した。i が偶数のときは、確かにδn たちで生成される。しかし、i が奇数のときは、δn たちで生成されるイデアルは i 次 Fitting イデアルより真に小さく、実際 Tate Shafarevich 群の i-1 次 Fitting イデアルに等しいことを証明した。

Tate Shafarevich 群については、Cassels の定理により、そのアーベル群としての構造は二つの等しいアーベル群の直和になるので、上記の結果は、L 関数の値から決まる量δn により、Tate Shafarevich 群のアーベル群としての構造が完全に決定することを表している。しかしながら、その構造定理の形はイデアル類群の場合と異なる。なお、この定理を得るためには、次に述べる結果も使う。

(2) 有理数体上の楕円曲線の円分 Zp拡大上の Selmer 群の 0 次 Fitting ideal についての結果を得た。E を有理数体上に定義された楕円曲線、p は良い通常還元を持つ素数であるとする。K を有理数体の有限次アーベル p 拡大とするとき、その円分Zp拡大上のSelmer群を考える。このとき、μ=0 の仮定の下に、K の円分 Zp 拡大上の p 進 L 関数が、Selmer 群の双対の 0 次 Fitting イデアルに入ることを証明した。

(3) Greenberg コホモロジーという Selmer 群を定義して、(2)の結果を一般の critical, ordinary な p 進表現に一般化した。

(4) critical, ordinary なp進表現に対して、Greenberg による岩澤主予想を仮定して、Gauss 和型の Euler 系を構成した。このとき、Greenberg コホモロジーが役に立つ。Euler 系の Euler 因子を少し変更したものを使うと便利なので、そのような修正も行った。

(5) (4)と同じ状況で、Gauss 和型の Kolyvagin 系を構成した。このときの構成の最初の鍵は、イデアル類群のときの方法は使えないので、円分 Zp 拡大の中間体からノルムで落ちてくる元を使うことである。しかし、このように Euler 系から直接定義すると、Kolyvagin 系の最初の性質も証明することができない。というのは、われわれが使う Euler 系が有限 Euler 系であって、Zp 拡大上には存在していないからである。そこで、ある種の条件を満たす素数の積 nq を考え(q は素数)、そのような nq に対し、Kolyvagin 系κ_{n,q} を、上で書いた Euler 系からできる Kolyvagin 系を修正することによって、定義していく。弱 Kolyvagin 系というものを定義し、それらを修正して構成、定義していく。

Mazur と Rubin による今までの普通の Kolyvagin 系は、2 つの性質を持つが、われわれの Kolyvagin 系は 4 つの基本性質をもつ。特に重要なのは、L 関数の値とつながる 2 つの性質である。

(6) critical, ordinary なp進表現に対して、p 進表現にさらに条件をつけて(楕円曲線の場合はこの条件をみたさない)、(5)の状況で有理数体の円分 Zp 拡大の中間体上の Selmer 群の双対の Galois 加群としての高次 Fitting イデアルを決定した。これにより、普通の岩澤理論よりはるかに詳しい Galois 加群としての性質が、ゼータ関数の情報から取り出せることがわかった。

(7) (1) で述べた構造定理で、L(E,1)が 0 でないという仮定をはずして、p 進高さペアリングが非退化という仮定を置くと、Selmer 群の双対のねじれ部分について、(1)と同じ結論が得られることを証明した(r を階数とすると、r+2i 次の Fitting イデアルがδn で表される；i は負でない整数)。(1)のような現象が起こる背後に、楕円曲線に伴う表現が自己双対だということがあることがわかった。このことから、Selmer 群を与える関係行列を、交代エルミート行列に取ることができ、これを有理数体上の一番簡単な場合に見ると、交代行列になっており、そのことを使って見通しのよい証明ができることがわかった。なお、この交代エルミート行列は、p 進高さペアリングと Cassels のペアリングの両方と結びついている。また、解析的方面、すなわちδn の性質については、ゼータ関数の関数等式に対応していることがわかった。このような自己双対なモチーフを扱うときには、Chebotarev 密度定理をイデアル類群のときと同じように使うことはできず、それがイデアル類群のときと違う結論が出る理由であることがわかった。

(8) (5)とは違う方法でも Gauss 和型の Kolyvagin 系を構成した。nq についての条件が(5)よりゆるくても、κ_{n,q}が存在することを証明した。これは、数値的な計算のためにも意味のあることである。多くの楕円曲線に対して、数値的にSelmer群および Tate Shafarevich 群を計算した。

δn はモジュラー記号を使って計算できるので、たくさんの楕円曲線に対し、δn を計算機を用いて計算し(計算ソフトは Magma を使った)、それらの計算およびわれわれの定理を用いて、その楕円曲線の Mordell Weil 群と Tate Shafarevich 群を決定した。Selmer 群の 3 成分の 3 階数が 3 である例もいくつも計算した。また、Selmer 群の p 成分についての予想を提起し、その予想をこれらの例に対して確かめた。

(9) 総実代数体 k と CM 体 K で、K/k がアーベル拡大であるものを考える。G を Galois 群とする。このとき、Brumer 予想は、K/k の Stickelberger 元θ（K/k）に 1 の冪根の零化域の元をかけたものは、K のイデアル類群を消す、と言うことを主張する。これよりも強く、θ（K/k）に 1 の冪根の零化域の元をかけたものが、イデアル類群を Z[G]加群とみたときの、0 次 Fitting イデアルに入るか、という問題 SB を考えると、これは成り立つ場合も多いが一般には成立しない。そこで、θ（K/k）に 1 の冪根の零化域の元をかけたものが、イデアル類群の Pontrjagin 双対を Z[G]加群とみたときの、0 次 Fitting イデアルに入るか、という問題 DSB を考える。Greither は同変玉側数予想を仮定して、K が 1 の p 乗根を含まなければ、DSB の p 成分が成立することを証明したので、こちらの方が成立しやすいと思われる。しかしながら、われわれはまず、岩澤理論的研究から、DSB も一般には成立しないことを、この研究で示した。特に、G の p 成分が巡回群でなく、K/k が円分 Zp 拡大と線形無関連であり、K が 1 の p 乗根を含むときは、K の円分 Zp 拡大の中間体 K_{n}に対して、n が大きくなれば K_{n}/k に対して DSB が必ず不成立となることを証明した。

(10) K/k を(9)の通りとするとき、K の円分 Zp 拡大 K_{cyc}に対して、G の p 成分が p 次巡回群のときに、K_{cyc}のイデアル類群の双対を K_{cyc}/k の Galois 群上の加群とみたときの Fitting イデアルを決定した。特にこのときには、DSB が成立することを証明した。

(11) (9)では岩澤理論的な研究を行ったが、有限次代数体をそのまま扱う研究を行い、DSB が不成立の拡大を理論的にも数値的にも構成した。具体的数値例のひとつについて述べる。これは、実 2 次体上の 18 次拡大で、G は巡回群ではない。イデアル類群の 3 成分の位数は 3 の 11 乗であり、きわめて大きな群であるが、この群への G の作用も計算機で計算し(計算ソフトは pari/GP を用いた)、Fitting イデアルも計算した。理論的には、岩澤理論を使わずに、イデアル類群のコホモロジーを計算することで、DSB が不成立となる条件を導き、DSB が不成立となる場合が多く存在することを証明した。また、SB と DSB が共に不成立となることがあることも証明し、数値例も構成した。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 9 件）

① Masato Kurihara, Refined Iwasawa theory and Kolyvagin systems of Gauss sum type, Proceedings of the London Mathematical Society, 査読有, Vol.104, 2012, pp.728-769, DOI: 10.1112/plms/pdr044

② Masato Kurihara and Takashi Miura, Ideal class groups of CM-fields with non-cyclic Galois action, Tokyo Journal of Mathematics, 査読有, Vol.35, 2012, pp.411-439

③ Masato Kurihara, On stronger versions of Brumer's conjecture, Tokyo Journal of Mathematics, 査読有, Vol.34-2, 2012, 407-428

④ Yoshitaka Hachimori, Iwasawa lambda-invariants and congruence of Galois representations, Journal of the Ramanujan Math. Society, 査読有, Vol.26-2, 2011, 203-217

⑤ Masato Kurihara and Takashi Miura, Stickelberger ideals and Fitting ideals of class groups for abelian number fields, Mathematische Annalen, 査読有, Vol.350, 2011, 549-5751

⑥ Yoshitaka Hachimori, Euler characteristics of fine Selmer groups, J. Ramanujan Math. Society, 査読有, Vol.25, 2010, 285-293

⑦ Kazuo Matsuno, Elliptic curves with large Tate-Shafarevich groups over a number field, Mathematical Research Letters, 査読有, Vol.16, 2009, 449-461

〔学会発表〕（計 10 件）

① Masato Kurihara, Arithmetic of Kolyvagin systems of Gauss sum type for elliptic curves, Number Theory Forum（招待講演）, 慶應義塾大学, 2013/03/25

② Masato Kurihara, Iwasawa theory and a refined Birch Swinnerton-Dyer conjecture, Arithmetic and Algebraic Geometry 2013（招待講演）, 東京大学, 2013/01/30

③ Masato Kurihara, On the structure of ideal class groups and Selmer groups I, II, III, L-functions and Arithmetic（招待講演）, Yonsei University, 2012/10/24-26

④ Masato Kurihara, Brumer-Stark予想とGross予想について，第20回整数論サマースクール,熊本，2012/09/05
⑤ Masato Kurihara, On the Stickelberger elements and annihilation results for class groups I,II, Iwasawa theory Workshop 2012(招待講演)，大阪大学，2012/04/05-06
⑥ Masato Kurihara, Euler systems of Gauss sum type and the structure of Selmer modules, The 3rd Pan Asian Number Theory Conference(招待講演), Chinese Academy of Sciences (Beijing), 2011/08/25
⑦ Taka-aki Tanaka, Algebraic independence of the values of a certain entire function defined by the infinite product, 解析数論 -複素関数の値の分布と性質を通して，京都大学数理解析研究所，2010/10/08
⑧ Masato Kurihara, Selmer groups and modular elements for elliptic curves, Magma 2010 Conference on p-adic L-functions, University of Montreal, 2010/02/26
⑨ Masato Kurihara, Refined Iwasawa theory, East Asian Number Theory Conference, 清華大学（北京）, 2009/08/21
⑩ Masato Kurihara, Refined Iwasawa theory, Park City Mathematics Institute research program, Park City(U.S.A.), 2009/07/15

〔図書〕（計0件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計0件）

○取得状況（計0件）

６．研究組織
(1)研究代表者
栗原　将人（KURIHARA, Masato）
慶應義塾大学・理工学部・教授
研究者番号：40211221

(2)研究分担者
太田　克弘（OTA, Katsuhiro）
慶應義塾大学・理工学部・教授
研究者番号：40213722

松野　一夫(MATSUNO, Kazuo)
津田塾大学・学芸学部・准教授
研究者番号：40332936

八森　祥隆(HACHIMORI, Yoshitaka)
東京理科大学・理工学部・准教授
研究者番号：50433743

坂内　健一(BANNAI, Kenichi)
慶應義塾大学・理工学部・准教授
研究者番号：90343201

田中　孝明(TANAKA, Taka-aki)
慶應義塾大学・理工学部・講師
研究者番号：60306850

小林　真一(KOBAYASHI, Shinichi)
東北大学・理学(系)研究科・准教授
研究者番号：80362226

三浦　崇(MIURA, Takashi)
慶應義塾大学・理工学部・特任助教
研究者番号：60631934

(3)連携研究者
該当なし