

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 3月31日現在

機関番号：32612

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2009～2011

課題番号：21340027

研究課題名（和文） アルゴリズムのエルゴード理論的研究

研究課題名（英文） An ergodic study of algorithms

研究代表者

仲田 均 (Nakada Hitoshi)

慶應義塾大学・理工学部・教授

研究者番号：40118980

研究成果の概要（和文）：数論に現れるアルゴリズムを中心にその可測力学系としての性質を研究し、エルゴード理論、ディオファントス近似論、一様分布論の新しい研究成果を導き出した。とりわけ、非アルキメデスの数体上の非同次ディオファントス近似論、非アルキメデス数体を係数とする多項式に対するユークリッドアルゴリズムの計算回数の評価、区間交換に対する Rauzy induction のエルゴード理論的性質、実数に関する多次元連分数アルゴリズム、一様分布の誤差の広がりに関して新しい所見を得た。

研究成果の概要（英文）：We studied some properties of algorithms, mostly appeared in number theoretic algorithms, as measurable dynamical systems. In particular, we focused problems related to the projects in below and got a number of new results. The projects we focused are the following : (1) inhomogeneous Diophantine approximations over non-Archimedean fields, (2) estimates of costs of Euclidean algorithms over polynomials of coefficients in a finite field, (3) ergodic properties of Rauzy induction, (4) multi-dimensional continued fraction algorithms, (5) discrepancy problems of uniform distributions.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	2,800,000	840,000	3,640,000
2010年度	2,700,000	810,000	3,510,000
2011年度	2,500,000	750,000	3,250,000
年度			
年度			
総計	8,000,000	2,400,000	10,400,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般

キーワード：エルゴード理論・連分数・ユークリッドアルゴリズム

1. 研究開始当初の背景

平成18年度～平成20年度の期間、科学研究費基盤(B)「エルゴード理論と測度論的数論」

により、確率論とエルゴード理論双方の手法を用いて Diophantine approximation とその解を求めるアルゴリズムとしての低次元

可測力学系の研究を行ってきた。この研究成果から多くの新たな研究課題が派生し、さらに継続、発展させる必要性が生じた。また、日本学術振興会とフランスの CNRS との協定による SAKURA プロジェクトにより新たな研究を始める海外の研究者との研究ネットワークが強化された。

2. 研究の目的

これまでの研究成果をアルゴリズム論に結び付けることで可測力学系の新しい研究の流れに新たな視点を与えると同時に様々な数論的アルゴリズムの持つ確率論的性質を明らかにすることを目的とした。またコンピューターによる計算の手順のコスト評価に関する問題、乱数の生成などに関連する一様分布の誤差の評価、Teichmüller flow のエルゴード理論など周辺諸分野に新しい所見を与えることも目的の一つである。

3. 研究の方法

研究代表者・分担者および国内連携研究者が研究テーマごとに下記のグループに分かれ、研究討論などを通して研究を進めると同時に、海外研究連携者とは電子メールを通して研究連絡を行った。また、適宜、研究集会を行いグループ間の情報交換を行うと共に海外研究機関訪問、国外研究者招聘により海外連携研究者との共同研究を行った。研究の主な数学的手法は研究開始段階ではエルゴード理論、確率論、数論、組み合わせ理論、最適化理論、複素解析の各分野から選ばれている。その後、各テーマごとの進展に応じて、いくつかの手法を組み合わせながら同時に新しい手法を作り出して行く。

グループ 1 仲田、夏井

α 連分数のエルゴード理論、ユークリッドアルゴリズムの作る力学系の研究

グループ 2 勝良、浜、吉田、江居

アルゴリズムから生成される記号力学系とそれに付随するサブスティテューションの研究

グループ 3 福山、厚地、田村 (要)、宮崎、盛田

一様分布論の研究、および、数論的アルゴリズムから生成されるランダム行列の確率過程としての研究

グループ 4 田村 (明)、仲田、石川

アルゴリズムのエルゴード理論的取扱いとその応用

4. 研究成果

(1) ディオファントス近似論の中で有理数による近似の特に良いものが、力学系の挙動を悪くすることがしばしばある。そのような数の中で一つの典型である Brjuno 数に対し

て、Semi-Brjuno 数の概念を新たに導入し Brjuno 数の新たな特徴づけを行うと同時に付随する Brjuno 関数の性質を導き出した。また、 α 連分数に対して Brjuno 関数の概念を拡張し α 連分数のエルゴード理論的研究の可能性を広げることに成功した。また、数論的な側面としては、 α が正の場合の α 連分数展開に関して Legendre 定数が必ず存在することが証明され、その値の評価が与えられた。この結果は α 連分数変換の natural extension の構成問題と深く関連していると考えられる。この研究に誘発され、その後、オランダ・フランス・イタリア・アメリカの研究者達により α 連分数変換に関する 2008 年の仲田・夏井による予想が解決された。 α 連分数変換のエルゴード理論的性質、数論的性質については多くの未解決問題が残されており、本研究グループ、イタリアグループ、オランダ・フランスグループの間で互いに競い合って研究を進めている。なお今回の研究は仲田 (代表者)、夏井 (分担者) とイタリアの Scuola Normale Superiore の S. Marmi、L. Luzzi との共同研究による。この共同研究を通してイタリアの研究グループと本研究に加わっている国内研究者との将来に向けた研究交流が確立された。

(2) 非同次ディオファントス近似の測度論的研究において、Kurzweil の定理は長いこと忘れ去られていた。近年この定理がその意味することの重要さと相まって再び注目を浴びている。本研究ではこの定理が正標数を持つ形式的べき級数の場合でも成立することを示すことに成功した (韓国の Dong Han Kim との共同研究)。この成果はさらに除外集合の詳細な分類へと研究が発展している。これら結果を米国の研究者 J. Chaika による非同次近似の研究との対比させることにより、当初の予想と異なり形式的べき級数の場合には実数の場合と異なった近似の性質が現れることが明らかになった。

(3) 多次元連分数に関しては多くの異なったアルゴリズムが考えられている。その中でオーストリーの F. Schweiger により提唱された fully subtractive algorithms についてはそれが散逸的であるかどうかについては長年の間未解決であった。この問題について、実際に、散逸的であり、特別な場合を除いてエルゴード的にならないことを証明した。これはオランダの R. Fokkink, C. Kraaikamp との共同研究である。本研究成果の公開後、フランスの A. Nogueira 達により、上記特別な除外ケースで 3 次元の場合について、fully subtractive algorithm がエルゴード的になることが証明された。しかし、一般次元の場合にもエルゴード的になることは予

想されるもののまだ証明は与えられていない。この問題は今後の課題となっている。

(4) Interval exchangetransformation の研究は 1980 年初頭の W. Veech と H. Masur による Keane 予想の解決から Teichmuller flow の研究と相まって大きく進展した。その中で W. Veech による Rauzy induction の natural extension の構成は大きな役割を果たしている。今回の研究では、正規化された Rauzy induction に対してその定義域の中の部分集合に Darling-Kac 集合が存在を示した。これにより Rauzy induction が pointwise dual ergodicity とよばれる非常に強い性質を持つことを示すことが分かる。このことは interval exchange maps から作られる Teichmuller 空間上の flow が非常に強い混合性を持つことに対応している。その後、フランスの A. Nogueira たちにより正規化しない Rauzy induction が exact であることが証明された。今後 Rauzy induction の持つエルゴード理論的性質の解明は Teichmuller flow の研究との対比で重要になると考えられる。

(5) ユークリッドアルゴリズムのコスト関数とはアルゴリズムが終結するまでの計算回数を表す関数を意味する。これまでにフランスの B. Vallee 達によりアルゴリズムの回数やアルゴリズムによる掛け算の回数を表す bit cost と呼ばれる関数の評価などが行われてきた。今回の研究ではこの bit cost を精密化し fine bit cost の概念を導入した。この関数に対して大数の法則が成立することを組み合わせ論的数え上げの方法とエルゴード理論的方法を併せて証明した。この成果はいったん論文としてまとめ上げたが、その後、さらに生成関数の方法を用いることで中心極限定理まで示すことができることが判明し、現在論文を改訂中である。この方法論を用いることにより、従来の方法では困難とされていた 3 個以上の多項式に対するユークリッドアルゴリズムのコストが評価出来ることになる。その場合、ユークリッドアルゴリズム自体が一通りでないが、アルゴリズム間のコストの比較が fine bit cost を通して可能になった。この問題も現在継続して研究を進めている。

その他下記のような新たな研究成果を得た。

(6) linear growth を含む gap series の discrepancy に対して重複対数法則が成立することの証明を与えた。また、small gap を持つ lacunary sequence の discrepancy に対して重複対数の法則を a. e. で証明した。

(7) Hadamard 条件を満たす(小さな gap を持つ)三角級数の和に関して中心極限定理が成

立することを証明した。により関する問題は古くから研究されているが、本研究では古典的問題に関して重複対数の法則、中心極限定理、discrepancy の評価などについて新たな結果を得た。この問題の詳細な議論は現在も引き続き行われている。

(8) 完備放物型ケーラー多様体上の有限および無限エネルギーを持つ解析関数の値分布を熱拡散に対する Nevanlinna 理論を用いて新たな評価を得た。

(9) substitutions のあるクラスを考え、そこに primitive components の概念を導入した。このクラスは primitive あるいは almost primitive となる substitutions を含み、また Chacon substitution も含んでいる。このクラスに属する substitution に対して、それから作られる subshift を考える。そのとき primitive components に応じて disjoint な集合に分解されその各々に対して unique な不変測度を持つことを示した。Brattelli diagram を用いずに subshift の理論のみでこの結果が証明できたことは、substitution とその dynamics の研究の中では大きな意味を持つ。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 19 件)

① Katusi Fukuyama, Tetsujin Watada, A metric discrepancy result for lacunary sequences, Proceedings of American Mathematical Society, 査読有, vol. 49, 2012, pp. 52--78
DOI: 10.1090/s0002-9939-2011-10940-7

② Katusi Fukuyama, Metric discrepancy results for Erdos-Fortet sequence, Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica, 査読有, vol. 140, 2012, pp. 749--754
DOI: 10.1556/SscMath.2011.1186

③ Masaki Hama, Hisatoshi Yuasa, Invariant measures for subshifts arising from substitutions of some primitive components, Hokkaido Mathematical Journal, 査読有, vol. 40, 2011, 279-312
<http://hmj2.math.sci.hokudai.ac.jp/1370>

④ Kae Inoue, Hitoshi Nakada, On the Existence of a Darling-Kac Set for the Renormalized Rauzy map, Tokyo Journal of Mathematics, 査読有, vol. 34, 2011,

289-302

DOI: 10.3836/tjm/1327931385

⑤ Robbert Fokkink, Cor Kraaikamp, Hitoshi Nakada, On Schweiger's problems on fully subtractive algorithms, Israel Journal of Mathematics, 査読有, vol. 186, 2011, 285--302
DOI: 10.1007/s11856-011-0140-3

⑥ Dong Han Kim, Hitoshi Nakada, Metric inhomogeneous Diophantine approximations on the field of formal Laurent series, Acta Arithmetica, 査読有, vol. 150, 2011, 129-142
DOI: 10.4064/aal50-2-3

⑦ Rie Natsui, On the Legendre constant of α -continued fractions, Journal of Number Theory, 査読有, vol. 131, 2011, pp. 487--507
DOI: 10.1016/j.jnt.2010.09.008

⑧ Katusi Fukuyama, A metric discrepancy result for a lacunary sequence with small gap, Monatshefte für Mathematik, 査読有, vol. 162, 2011, pp. 277--288
DOI: 10.1007/s00605-009-0185-0

⑨ Katusi Fukuyama, A central limit theorem for trigonometric series with bounded gaps, Probability Theory and Related Fields, 査読有, vol. 149, 2011, pp. 139--148
DOI: 10.1007/s00440-009-0245-3

⑩ Katusi Fukuyama, Pure Gaussian limit distributions of trigonometric series with bounded gaps, Acta Mathematica Hungarica, 査読有, vol. 129, 2010, pp. 303--313
DOI: 10.1007/s10474-010-0034-6

⑪ Katusi Fukuyama, A law of the iterated logarithm for discrepancies: non-constant \limsup , Monatshefte für Mathematik, 査読有, vol. 160, 2010, pp. 141--149
DOI: 10.1007/s00605-008-0062-2

⑫ Atsushi Atsuji, On the number of omitted values by a meromorphic function of finite energy and heat diffusions, 査読有, Journal of Geometric Analysis, vol. 20, 2010, 1008-1025
DOI: 10.1007/s12220-010-9131-6

⑬ Laura Luzzi, Stefano Marmi, Hitoshi

Nakada, Rie Natsui, Generalized Brjuno functions associated to α -continued fractions, Journal of Approximation Theory, 査読有, vol. 162, 2010, pp. 24-41
DOI: 10.1016/j.jat.2009.02.004

⑭ Shigeo Kusuoka, Kazumasa Kuwada, Yozo Tamura, Large deviation for stochastic line integral as L^p -recurrents, Probability Theory and Related Fields, vol. 147, 2010, pp. 649--674
DOI: 10.1007/s00440-009-0219-5

[学会発表] (計 15 件)

① Hitoshi Nakada
On the dual of Rauzy induction
Workshop on Infinite Ergodic Theory
2012年5月30日
University of Surrey 英国

② Atsushi Atsuji
Another approach to Nevanlinna theory from diffusion processes
International Conference in Nevanlinna Theory and Complex Geometry
2012年3月17日
University of Notre Dame 米国

③ Hitoshi Nakada
On costs of some Euclidean type algorithms over $F_q[X]^3$
Dynamics of complex systems 2012
2012年3月6日
北海道大学理学部

④ Hitoshi Nakada
On the dual algorithm of Rauzy induction 1, 2, 3
数論とエルゴード理論
2012年2月18日
金沢大学サテライト・プラザ

⑤ Hitoshi Nakada
On the dual algorithm of Rauzy induction エルゴード理論とその周辺
2011年12月8日
大阪大学理学部

⑥ Rie Natsui
Bit complexity and some Euclidean type algorithm over $F_q[X]^3$
2011年12月7日
大阪大学理学部

⑦ Rie Natsui
Euclidean algorithm over $F_q[X]$ and its
cost functions

Functions in Number Theory and Their
Probabilistic Aspects
2010年12月17日
京都大学数理解析研究所

⑧ Hitoshi Nakada
On the dynamics of fully subtractive
algorithm

Japan-Korea Workshop on Number Theory and
Ergodic Theory
2010年7月28日
京都大学数理解析研究所

⑨ Rie Natsui
Euclidean algorithm over $F_q[X]$

Japan-Korea Workshop on Number Theory and
Ergodic Theory
2010年7月27日
京都大学数理解析研究所

⑩ Hitoshi Nakada
On continued fraction mixing

Workshop on Infinite Ergodic Theory and
Related Fields
2010年6月28日
Weizmann Institute of Science イスラエル

⑪ Rie Natsui
On the Euclidean algorithm and Farey map
for formal power series

エルゴード理論の最近の話題
2009年11月6日
日本大学文理学部

⑫ Hitoshi Nakada
Renormalized Rauzy map に対する
Darling-Kac set の存在について

Dynamics of complex systems 2009
2009年8月31日
北海道大学理学部

⑬ Rie Natsui
Euclidean algorithm in positive
characteristic and associated Farey map

Dynamics of complex systems 2009
2009年8月31日
北海道大学理学部

⑭ Hitoshi Nakada
Ergodicity of a group extension of
Jacobi-Perron algorithm

Workshop on Measurable and Topological
Dynamical Systems in Asia

2009年6月18日
Ajou University 韓国

⑮ Rie Natsui
Non-monotonicity of entropy of alpha
continued fraction transformations

Workshop on Measurable and Topological
Dynamical Systems in Asia
2009年6月18日
Ajou University 韓国

6. 研究組織

(1) 研究代表者

仲田 均 (NADAKA HITOSHI)
研究者番号: 40118980

(2) 研究分担者

田村 明久 (TAMURA AKIHISA)
慶應義塾大学・理工学部・教授
研究者番号: 50217189

厚地 淳 (ATSUJI ATSUSHI)
慶應義塾大学・経済学部・教授
研究者番号: 00221044

田村 要造 (TAMURA YOZO)
慶應義塾大学・理工学部・教授
研究者番号: 50171905

夏井 利恵 (NATSUI RIE)
日本女子大学・理学部・准教授
研究者番号: 60398633

勝良 健史 (KATSURA TAKESHI)
慶應義塾大学・理工学部・准教授
研究者番号: 50513298

宮崎 琢也 (MIYAZAKI TAKUYA)
慶應義塾大学・理工学部・准教授
研究者番号: 10301409

浜 正樹 (HAMA MASAKI)
文京学院短期大学 英語科 准教授
研究者番号: 90389875

石川 史郎 (ISHIKAWA SHIRO)
慶應義塾大学・理工学部・准教授
研究者番号: 10051913

福山 克司 (FUKUYAMA KATSUSHI)
神戸大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：60218956

(3)連携研究者

吉田 雅通 (YOSHIDA MASAMICHI)
大阪市立大学大学院理学研究科・准教授
研究者番号：60264793

江居 宏美 (EI HIROMI)
弘前大学大学院理工学研究科・助教
研究者番号：60333051

盛田 健彦 (MORITA TAKEHIKO)
大阪大学大学院理学研究科・教授
研究者番号：00192782

井上 賀絵 (INOUE KAE)
慶應義塾大学・薬学部・専任講師
研究者番号：90621011