

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年5月17日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究（B）一般

研究期間：2009～2011

課題番号：21340031

研究課題名（和文）ランダム行列、統計物理に動機づけられた無限次元確率力学系

研究課題名（英文）Infinite-dimensional stochastic dynamical systems motivated by random matrices and statistical physics

研究代表者

長田 博文（OSADA HIROFUMI）

九州大学・大学院数理学研究院・教授

研究者番号：20177207

研究成果の概要（和文）：本研究では、2次元クーロンポテンシャルに対しても適用可能な、干渉ブラウン運動の構成に関する一般的構成定理と SDE 表現定理を確立した。その結果を Ginibre 点過程、Dyson 点過程、Bessel 点過程というランダム行列に関する代表的な測度に対して適用し、無限次元確率力学系を記述する確率微分方程式を求めて、解いた。Ginibre 点過程の Palm 測度の特異性を研究し、通常の Gibbs 測度と異なる興味深い結果を得た。更に、2次元ヤング図形の時間発展モデルを構成し、そのスケール極限を求めた。

研究成果の概要（英文）：We have established a general construction theorem and an SDE representation theorem for interacting Brownian motions with 2D Coulomb potentials. We have applied them to the representative random point fields arising from Random Matrix Theory such as Ginibre, Dyson, Bessel random point fields, and have detected and solve the infinite-dimensional stochastic differential equations describing the associated stochastic dynamics. We prove the Palm measures of Ginibre random point field have very strange property that is very different from usual Gibbs measures with Ruelle's class interaction potentials. We have constructed the time evolutionary model of 2D Young diagram and have proved its scaling limit.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	3500000	1050000	4550000
2010年度	6200000	1860000	8060000
2011年度	3100000	930000	4030000
年度			
年度			
総計	12800000	3840000	16640000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：確率解析・対数ガス・クーロンポテンシャル・無限次元確率力学系・ランダム行列・干渉ブラウン運動・点過程・拡散過程

1. 研究開始当初の背景

ランダム行列に関する点過程は、1次元空間の場合、干渉項の前の係数が、 $\beta=1,2,4$ の

場合に sine 点過程、Airy 点過程、Bessel 点過程という3つの代表例がしられ、2次元空間については、 $\beta=2$ の場合に Ginibre 点過程

が知られていた。

以上は、いずれも行列式過程および類似の構造を持つ相関関数の明示表現によって定義される点過程であった。特に Airy 点過程は、2000 年以降様々な組み合わせ論的なモデルの極限として得られるのがわかっており、所謂、KPZ 普遍性とのからみで盛んに研究されてきた。しかし、その確率解析的扱いは、全く不十分であった。

ランダム行列に関する無限粒子系の時間発展、確率力学の構成という問題は、sine 点過程の場合に、Spohn と長田の研究で $\beta=2$ の場合になされていた。また一般に 1 次元系については、カーリン・マクレガー公式を介して、時空間相関関数の方法で、確率力学が構成されていたが、拡散過程か否か、あるいは、確率微分方程式による表現はまだ知られていなかった。しかも、 $\beta=2$ の場合に結果が限られていた。また、2 次元系については、以上の 1 次元系的手法が使えず、確率力学に関する結果は皆無だった。

2. 研究の目的

干渉ブラウン運動と呼ばれる無限次元確率力学系について、干渉ポテンシャルが対数関数 (2 次元クーロンポテンシャル) の場合に確率力学系を構成し、その性質を解明する。まず Dirichlet 形式を用いて、確率力学系を拡散過程のレベルで構成する。また確率微分方程式による表現 (SDE 表現) を構築する。重要な例について、その時空間・相関関数の明示表現を求める。スケールング極限を求めて、この確率力学系の大局的な構造を解明する。そのためには、確率力学系の平衡状態となる確率点場の、精密な確率幾何的考察が必要になる。この研究は、確率幾何の確率解析への応用の側面も持つ。

3. 研究の方法

研究分担者および連携研究者が、適宜集まり議論し、共同研究する。また、小規模の研究集会を適宜開催する。重要な話題についての勉強会を開催する。特に、種村は九州大学を数回訪問し、長田および白井と討論し、共同研究を行う。

研究期間を通じて、「大規模相互作用系の確率解析」と「無限粒子系、確率場の諸問題」という中規模の研究集会を毎年開催する。特に前者は、適宜、国際研究集会として、より大きな規模で開催しその際は、海外から多数の研究者を招聘する。

2010 年度には、Work Shop : 「34th Conference on Stochastic Processes and Their Applications (SPA2010)」を、日本 (大阪) で開催される。そこでいくつかの特別セッションをオーガナイズもしくはサポートし、研究成果を世界に発信するとともに、最

新の成果を取得する。またそれに引き続き、「大規模相互作用系の確率解析 (Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems)」を開催する。この研究集会は、統計物理に動機付けを持つ確率論というテーマに関して、日本に於いて代表的なシンポジウムとして、毎年、継続して開催しているものだが、上記 SPA2010 とタイアップしたことにより、豪華な陣容とする。共同研究者の Werner が Fields 賞を受賞した SLE の研究で名高い Lawler をはじめ、多数の著名な研究者が参加する予定である。尚、この研究集会は、2011 年度にも、国際研究集会として大きな規模で開催する。

4. 研究成果

(1) 2011 年度

Airy 点過程に関する確率力学の研究を長田と種村で完成させることを目的としたが、予想以上に進み干渉係数が $\beta=1, 2, 4$ の場合に証明し、無限次元確率微分方程式の解として構成した。このモデルは、標準的な有限粒子系からの近似を行うと、付随する確率微分方程式の係数に発散項が現れるため、直感的なレベルでも確率微分方程式の係数の形が知られていなかった。長田は、Bessel 点過程に付随する確率力学を無限次元確率微分方程式の解として構成した。これらの結果によって、前年度までの結果と合わせると、ランダム行列論の 1 次元無限粒子系において代表的な 3 つの普遍的クラスすべてについて、確率力学を無限次元確率微分方程式の解のレベルで構成したことになる。これらのランダム行列に関する無限次元確率力学系の確率微分方程式の解の構成は、世界的にも他に類を見ない研究である。尚、これらの結果は、引き続き改良を重ね、「強解」の存在と一意性の形まで結果を強め、次年度に論文として発表する予定である。

Ginibre 点過程の Palm 測度の特異性は、長田と白井で研究しているが、任意個数の粒子の条件づけの場合について証明が完成し、プレプリントを作成した。研究の基礎になる長田の主論文の一つについても accept された。

この課題研究で共催する主たる研究集会である「大規模相互作用系の確率解析」を、国際シンポジウムの規模で高知大学において開催できた。またもう一つの主たる研究集会である「確率場の諸問題」も充実した内容であった。

多時刻相関関数が行列式で表現される確率過程を行列式過程とよぶが、種村と香取は、行列式過程の典型的な 3 つの例に対して、そのマルコフ性を示した。

舟木は、Otto, Villani らによる解析的手法を応用して、凸ポテンシャルを持つ $\nabla\phi$ 界面モデルの流体力学極限を示した。ここに

においては Gibbs 分布の長距離相関が問題を困難にする。

白井は、ランダムな複素解析的に対する関数型中心極限定理を示した。また、上半平面のセゲー核のウィナー積分で定義されるランダムな解析関数の零点が行列式点過程になることを示した。

② 2010 年度

長田と白井は、Ginibre 点過程の Palm 測度が、もとの Ginibre 点過程に対して特異になることを示した。また、これと対比すべき結果として、Ginibre 点過程の Palm 測度は、任意の 2 点で条件づけた場合、常にたがいに絶対連続であることを示した。通常の Ruelle クラスのポテンシャルを持つ Gibbs 測度については、Palm 測度は、常に元の測度に対して、絶対連続になる。従って、特に前者の結果は、Ginibre 点過程の背後にある 2 次元クーロンポテンシャルによる相互作用の強さが、測度の性質に、顕著な影響を与えた一例となっている。

相関関数が行列式で表現される確率過程は、行列式過程と呼ばれる。種村は、非衝突条件を課した独立な N 本の 2 乗ベッセル過程が、任意の初期値の下で行列式過程であることを示し、 N を無限大にしたときに無限次元行列式過程に収束することを証明した。また、非衝突ブラウン運動に対して複素ブラウン運動表示という新しい表現を与えた。この表示を用いることより、これまでは直交多項式を用いて導出していた Eynard-Mehta 型の行列式相関関数を直接的に導くことができ、さらに、緊密性、無限系の非衝突性など道に関する性質を示した。

白井は、コーシー核のウィナー積分が定義する上半平面の零点過程が行列式点過程になることを示した。これは、2003 年に Peres-Vir'ag の双曲ガウス型解析関数の零点が単位円板内の行列式点過程になるという結果の上半平面版である。また、その零点過程への極限定理を示した。

③ 2009 年度

長田は、Ginibre 点過程、Dyson 点過程、および、Bessel 点過程といったランダム行列に関する代表的な測度 (random point fields) に対して、部分積分公式を確立し、その対数微分を計算した。更に、これらの測度 (平衡分布) に対応する無限次元確率力学系を記述する確率微分方程式を求めて、解いた。以上の結果を得るために、一般論を構築し論文としてまとめた。

舟木は、2 次元ヤング図形の時間発展モデルを構成し、そのスケール極限として現れる境界曲線の運動を記述する非線形偏微分方程式を導き、その定常解は Vershik 曲線に

なることを示した。

種村は、一般の初期値に対して、ダイソン模型のバルクスケールリングおよびソフトエッジスケールリング極限で得られる無限粒子系を構成し、その性質を調べた。

白井は、有限グラフ上のグラウバーダイナミクスのスペクトルギャップはカップリングパラメーターに関して単調であるという予想 (未解決) が知られているが、もう少し強く、固定した時間におけるスピンの期待値もカップリングパラメーターに関して単調であるという予想には反例があることを示した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 15 件)

① H. Osada, Interacting Brownian motions in infinite dimensions with logarithmic interaction potentials, *Annals of Probability* (accepted), 査読有

② T. Funaki, Hydrodynamic limit for the $\nabla \phi$ interface model via two-scale approach, In: *Probability in Complex Physical Systems*, the Festschrift for Bolthausen and Gaertner, accepted (2012) 査読有

③ H. Osada, Infinite-dimensional stochastic differential equations related to random matrices, *Probability Theory and Related Fields* (2011), Online first, 39 ページ DOI: 10.1007/s00440-011-0352-9, 査読有

④ M. Katori, H. Tanemura, Noncolliding squared Bessel processes, *Journal of Statistical Physics*, 142 (2011) 149-172 査読有

⑤ M. Katori, H. Tanemura, Noncolliding processes, Matrix-valued process and determinantal processes, *SUGAKU EXPOSITIONS*, 24 (2011) 263-289, 査読有

⑥ T. Shirai, Exact computation for the cover times of certain classes of trees, *Journal of Math-for-Industry*, 2(2011) 査読有

⑦ H. Osada, Tagged particle processes and their non-explosion criteria, *Journal of the Mathematical Society of Japan* 62 no. 3, (2010), 867-894

⑧ T. Funaki, T. Otobe, Scaling limits for weakly pinned random walks with two large deviation minimizers, *Journal of the Mathematical Society of Japan* 62 (2010) 1005-1041 査読有

⑨ T. Funaki, M. Sasada, Hydrodynamic limit

for an evolutionary model of two-dimensional Young diagrams, Communications in Mathematical Physics 299 (2010) 335-363 査読有

⑩ M. Katori, H. Tanemura, Non-equilibrium dynamics of Dyson's model with an infinite number of particles, Communications in Mathematical Physics 293 (2010) 469-497 査読有

⑪ T. Shirai, A remark on monotonicity for the Glauber dynamics on finite graphs, Proceedings of Japan Academy 86 (2010) 33-37 査読有

⑫ T. Funaki and B. Xie, A stochastic heat equation with the distributions of Lévy processes as its invariant measures, Stochastic Processes and their Applications, 119 (2009) 307-326 査読有

⑬ E. Bolthausen, T. Funaki, T. Otake, Concentration under scaling limits for weakly pinned Gaussian random walks, Probability Theory and Related Fields, 143 (2009) 441-480 査読有

⑭ M. Katori, H. Tanemura, Zeros of Airy function and relaxation process, Journal of Statistical Physics, 136 (2009) 1177-1204 査読有

⑮ 香取真理, 種村秀紀, 非衝突過程、行列値過程、行列式過程、数学 61-3 (2009) 225-247 査読有

[学会発表] (計5件)

① 長田博文 「Infinite-dimensional stochastic differential equations related to random matrices」 Interacting particle systems, growth models and random matrices 2012年3月20日 Warwick大学 (英国・Coventry)

② 舟木直久 「An evolutionary model of Young diagrams with conservation law」 Workshop on the Fourier Law and Related Topics 2011年4月8日 Fields Institute (カナダ・トロント)

③ 種村秀紀 「Determinantal Processes and Entire Functions」 Quantum and classical random processes 2011年5月23日 (Centro de Ciencias de Benasque Pedro Pascual (スペイン、benasque))

④ 白井朋之 「Ginibre point process and its Palm measures: absolute continuity and singularity」 10th Workshop on Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems 2011年12月7日 高知大学理学部

⑤ 長田博文 「Infinitely dimensional stochastic differential equations for interacting Brownian motions」 確率解析とその周辺 2009年11月7日 東北大学理学部

数理学記念館(川井ホール)

[その他]

ホームページ等

<http://hyoka.ofc.kyushu-u.ac.jp/search/details/K002497/index.html>

および、そこでリンクされた当該研究課題のホームページ

6. 研究組織

(1) 研究代表者

長田 博文 (OSADA HIROFUMI)
九州大学・大学院数理学研究院・教授
研究者番号：20177207

(2) 研究分担者

舟木 直久 (FUNAKI TADAHISA)
東京大学・大学院数理学研究科・教授
研究者番号：60112174
種村 秀紀 (TANEMURA HIDEKI)
千葉大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：40217162
白井 朋之 (SHIRAI TOMOYUKI)
九州大学・大学院数理学研究院・教授
研究者番号：70302932

(3) 連携研究者

香取 真理 (KATORI MAKOTO)
中央大学・理工学部・教授
研究者番号：60202016
乙部 徹己 (OTOBE YOSHIKI)
信州大学・理学部・准教授
研究者番号：30334882
篠田 正人 (SHINODA MASATO)
奈良女子大学理学部・准教授
研究者番号：50271044
矢野 裕子 (YANO YUKO)
京都大学・大学院理学研究科・助教
研究者番号：10337462
(平成22年度、23年度)
矢野 孝次 (YANO KOUJI)
京都大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：80467646
(平成22年度、23年度)