

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年5月22日現在

機関番号：14501

研究種目：基盤研究（B）

研究期間：2009～2012

課題番号：21340036

研究課題名（和文）離散可積分系における幾何的方法

研究課題名（英文）Geometric methods in discrete integrable systems

研究代表者

山田 泰彦（YAMADA YASUHIKO）

神戸大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：00202383

研究成果の概要（和文）：

主に離散パルヴェ方程式について研究した。2階方程式の最も一般的な場合である楕円差分 E_8 型パルヴェ方程式を含む種々の場合に対してラックス形式を構成し、その幾何学的特徴を明らかにした。また、対応するパデ補間問題を構成し、超幾何型特殊解・離散パルヴェ方程式・ラックス形式の簡潔な表示を与えた。さらに、量子パルヴェ方程式を研究し、ゲージ理論・共形場理論との関係を調べた。

研究成果の概要（英文）：

We studied mainly the discrete Painlevé equations. The Lax formalism for various cases including the elliptic difference Painlevé equation of type E_8 was constructed, and its geometric characterization was clarified. We constructed the corresponding Padé interpolation problem and derive simple expressions for the Painlevé equation, Lax form and special solutions. Relations among the Gauge theory, conformal field theory and quantum Painlevé equations were also studied.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2010年度	900,000	270,000	1,170,000
2011年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2012年度	900,000	270,000	1,170,000
総計	4,100,000	1,230,000	5,330,000

研究分野：数物科学系

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：離散可積分系・ラックス表示・幾何学・特殊解・パデ近似・共形場理論

1. 研究開始当初の背景

可積分系理論においてラックス形式による方程式の表示は基本的である。坂井により分類された2階離散パルヴェ方程式について、いくつかはラックス形式が得られていたが、対称性の高い場合は全く手がついてい

なかった。代表者は、本課題の申請時に見いだしたパデ近似を用いる方法と、岡本・高野・坂井等により展開された初期値空間の理論を組み合わせることで、この問題の解決を目指した。

2. 研究の目的

本研究の目的は、離散可積分系の幾何学的方法による研究であり、課題の焦点は、 E_8 型パンルヴェ方程式のラックス形式の構成であった。

3. 研究の方法

研究方法の基本は計算機実験である。文献調査および関連研究者との情報交換によりアイデアを探索しつつ具体的な計算を進めた。

4. 研究成果

(1) 離散パンルヴェ方程式

山田は、楕円差分の場合を含む離散パンルヴェ方程式のラックス形式について、幾何学的な特徴づけによる構成法を得た。これにより、方程式の発見以来 10 年に及ぶ懸案を解決した。さらに、Ohta・Ramani・Grammaticos による $E_6 \sim E_8$ 型 q 差分パンルヴェ方程式についても Lax 形式を構成した。これらは、今後の研究の基礎になると期待される。また、野海・辻本・山田は、 E_8 型楕円差分パンルヴェ方程式に対応するパデ補間問題を研究し、特殊解の行列式公式、ラックス対、パンルヴェ方程式の簡潔な表示を与えた。

(2) 共形場理論とパンルヴェ方程式

粟田・山田は、4 次元超対称ゲージ理論と 2 次元共形場理論との関連 (AGT 予想) に関して、その q -類似版を提唱した。粟田・藤・菅野・真鍋・山田は、不確定特異点を持つ共形場理論を解析し、超対称 $SU(2)$ ゲージ理論との予想される一致を確認した。さらに山田は、 $SU(N)$ ゲージ理論への拡張を定式化した。名古屋・山田は、量子パンルヴェ方程式のラックス形式を定式化し、その対称性を記述した。また、ラックス方程式と共形場理論との関係も明らかにした。

(3) その他の結果

太田等は、平面曲線の可積分な運動の離散化を研究し、ホドグラフ変換の離散化などの重要な成果を挙げた。国場・尾角・山田は、4 面体方程式に関連し、量子群の関数環と量子展開環の新しい関係を得た。国場・坂本・山田は、 D_n 型箱玉系の一般化エネルギー関数を構成した。中屋敷厚氏とその学生の努力により、講義ノート「シグマ関数論入門」(中屋敷述、岩上・執行記) が作成された。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 12 件)

① H. Nagoya and Y. Yamada “Symmetries of

quantum Lax equations for the Painlevé equations”, *Annales Henri Poincaré*, Online First, (2013). 査読有.
DOI: 10.1007/s00023-013-0237-9.

② M. Noumi, S. Tsujimoto and Y. Yamada, “Padé interpolation for elliptic Painlevé equation”, *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, 40, (2013), 463–482. 査読有.
DOI: 10.1007/978-1-4471-4863-0.

③ Y. Ohta and J. Yang, “General High-Order Rogue Waves and Their Dynamics in the Nonlinear Schrodinger Equation”, *Proc. R. Soc. A* 468, (2012), 1716–1740. 査読有.
DOI: 10.1098/rspa.2011.0640.

④ B.-F. Feng, K. Maruno and Y. Ohta, “On the tau-Functions of the Reduced Ostrovsky Equation and the $A_2^{(2)}$ Two-Dimensional Toda System”, *J. Phys. A: Math. Theor.* 45, (2012), 355203. 査読有.
DOI: 10.1088/1751-8113/45/35/355203.

⑤ H. Awata, H. Fuji, H. Kanno, M. Manabe and Y. Yamada, “Localization with a surface operator, Irregular conformal blocks and Open topological string”, *Adv. Theor. Math. Phys.* 16, (2012), 725–804. 査読有.

⑥ Y. Yamada, “Lax formalism for q -Painlevé equations with affine Weyl group symmetry of type $E_n^{(1)}$ ”, *Int. Math. Res. Notices*, (2011), 17, 3823–3838. 査読有.

⑦ B.-F. Feng, J. Inoguchi, K. Kajiwara, K. Maruno and Y. Ohta, “Discrete integrable systems and hodograph transformations arising from motions of discrete plane curves”, *J. Phys. A: Math. Theor.* 44, (2011), 19pp. 査読有.
DOI: 10.1088/1751-8113/44/39/395201.

⑧ H. Awata and Y. Yamada, “Five-dimensional AGT conjecture and the deformed Virasoro algebra”, *JHEP*, 01, (2010). 査読有.
DOI: 10.1007/JHEP01(2010)125.

⑨ H. Awata and Y. Yamada, “Five-dimensional AGT relation and the deformed β -ensemble”, *Prog. Theor. Phys.* 124, (2010), 227–262. 査読有.

⑩ Y. Yamada, “A Lax formalism for the elliptic difference Painlevé equation”, *SIGMA*, 5, (2009), 15pp. 査読有.

DOI:10.3842/SIGMA.2009.042.

⑩ A. Kuniba, R. Sakamoto, and Y. Yamada, “Generalized energies and integrable D_n cellular automaton”, Proceedings “Infinite Analysis 09: New Trends in Quantum Integrable Systems”, (2009), 221-242. 査読有.

⑪ M. van der Put and M.-H. Saito, “Moduli spaces for linear differential equations and the Painlevé equations”, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 59 (2009), 2611-2667. 査読有.

[学会発表] (計 16 件)

① Y. Yamada, “Lax formalism for discrete Painlevé equations”, 8th IMACS International Conference on Nonlinear Evolution Equations (招待講演), 2013 年 3 月 25 日, Georgia 大学.

② H. Nagoya and Y. Yamada, “Symmetry of quantum Lax equations for the Painlevé equations”, 日本数学会無限可積分系セッション一般講演, 2012 年 9 月 18 日, 九州大学.

③ 山田 泰彦, “Quantum isomonodromy deformation and $N=2$ gauge theory”, 弦理論セミナー (招待講演), 2011 年 1 月 24 日, 名大多元数理.

④ 山田 泰彦, “Quantum isomonodromy deformation and $N=2$ gauge theory”, 物理セミナー (招待講演), 2011 年 2 月 4 日, 静岡大理.

⑤ 山田 泰彦, “量子 Fuji-Suzuki-Tsuda 方程式とインスタントン分配関数”, 日本数学会無限可積分系セッション一般講演, 2011 年 3 月 22 日, 早稲田大学.

⑥ Y. Yamada, “An interpolation problem related with q - $E^{(1)}$ Painlevé equation, Infinite Analysis 11 (招待講演), 2011 年 7 月 28 日, 東大数理.

⑦ 栗田英資・山田 泰彦, “ q -Virasoro 代数とインスタントン分配関数”, 日本数学会無限可積分系セッション一般講演, 2010 年 3 月 27 日, 慶応大学.

⑧ 山田 泰彦, “CFT, モノドロミー保存変形, Nekrasov 関数”, 「BC 系と AGT 予想の周辺」研究会 (招待講演), 2010 年 9 月 13 日, 東大数理.

⑨ 山田 泰彦, “ E_n 型 q -Painlevé 方程式の Lax

形式”, 日本数学会無限可積分系セッション一般講演, 2010 年 9 月 24 日, 名古屋大学.

⑩ 山田 泰彦, “ $N=2$ ゲージ理論とモノドロミー保存変形”, 「重力・幾何・素粒子」研究会 (招待講演), 2010 年 9 月 29 日, 大阪市大理.

⑪ 山田 泰彦, “A quantum isomonodromy equation and its application to gauge theories”, 神戸可積分系セミナー, 2010 年 11 月 17 日, 神戸大理.

⑫ 山田 泰彦, “モノドロミー保存変形と $N=2$ ゲージ理論”, 第 4 回日露ワーキングセミナー (招待講演), 2010 年 11 月 30 日, 大阪市大梅田文化交流センター.

⑬ 山田 泰彦, “共形場理論, モノドロミー保存変形と AGT 予想”, 表現論セミナー (招待講演), 2010 年 12 月 10 日, 京大数理解析研究所.

⑭ 山田 泰彦, “AGT 予想が切り開いた新たな数学の世界”, 「量子可積分系の新展開」研究会 (招待講演), 2010 年 12 月 19 日, 静岡県・富士教育研修所.

⑮ Y. Yamada, “Lax formalism for the elliptic difference Painlevé equation”, Geometric aspects of discrete and ultra-discrete integrable systems, 2009 年 4 月 3 日, Glasgow 大学.

⑯ 山田 泰彦, “離散 Painlevé 方程式の Lax 形式”, 可積分系数理とその応用, 2009 年 8 月 12 日, はこだて未来大学.

[図書] (計 0 件)

[その他]

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

山田 泰彦 (YAMADA YASUHIKO)
神戸大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 00202383

(2) 研究分担者

野海 正俊 (NOUMI MASATOHI)
神戸大学・自然科学系先端融合研究環重点研究部 教授
研究者番号: 80164672
太田 泰広 (OHTA YASUHIRO)
神戸大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：10213745
齋藤 政彦 (SAITO MASAHIKO)
神戸大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：80183044