

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 6月 5日現在

機関番号：13901
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2009～2011
課題番号：21500011
研究課題名（和文）
グラフ問題の近似アルゴリズムに関する研究
研究課題名（英文）
A Study of Approximation Algorithms for Graph Problems
研究代表者
平田 富夫 (HIRATA TOMIO)
名古屋大学・情報科学研究科・教授
研究者番号：10144205

研究成果の概要（和文）：

本研究ではグラフの独立集合問題および2部クリーク被覆（分割）問題の近似アルゴリズムの設計・解析を行った。独立集合問題に関しては重み付きグラフに対し「重み付き次数」の概念を提案し近似アルゴリズムを設計した。また、 C_k フリーグラフの独立集合を求める近似アルゴリズムを提案した。2部クリーク被覆問題に対しては集合被覆アプローチによる解法を提案した。2部クリーク分割問題に対しては、ブール行列の階数を用いた定式化と近似困難性の解析を行った。

研究成果の概要（英文）：

The purpose of this research is the design and analysis of approximation algorithms for the independent problem and the biclique covering (partitioning) problem of a graph. For the independent set problem, we proposed a notion of “weighted degree” of a vertex in a weighted graph, and gave approximation algorithms. We also gave an approximation algorithm for finding an independent set of a C_k -free graph. For the biclique covering problem, we proposed a method using a “set covering approach,” and for the biclique partition problem, we gave a formulation using the “exclusive rank” of a Boolean matrix. Furthermore, we discussed the approximation hardness of this problem.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2011年度	1,000,000	300,000	1,300,000
総計	3,100,000	930,000	4,030,000

研究分野：情報科学

科研費の分科・細目：情報学・情報学基礎

キーワード：アルゴリズム理論, 近似アルゴリズム

1. 研究開始当初の背景

実用上の多くの問題がグラフやネットワーク上の問題として定式化できるが、これらの多くは NP 完全または NP 困難であり、現在の計算機では計算時間が膨大になり手に負えない問題である。従来、このような問題に対しては入力に制約を付して多項式時間アルゴリズムを設計するか、または、解の質には理論的な保証を求めない発見的手法（たとえば、タブー探索や遺伝アルゴリズムなど）により解を得ることがなされてきた。

しかし、近年ではこの様子は大きく変化している。アルゴリズムの近似性能に関して理論的基盤が整備され、これまで実験的に性能を評価していた近似性能を理論的に議論できるようになった。これにより、NP 困難な組合せ問題についてアルゴリズムの近似限界を究明することが重要な研究テーマとなっている。

また、計算機性能の飛躍的な向上とアルゴリズム研究の成果により、従来ならばあきらめていた大きなサイズの問題でも厳密解を求めることが可能になった。特に、分枝限定法を駆使する整数計画ソルバーが開発され、これを用いて規模の大きい問題でも実用時間内に解けるようになってきている。したがって、このような高性能ソルバーの存在を前提にしたアルゴリズムの設計が新しい課題として生じている。

2. 研究の目的

本研究では、代表的なグラフ問題である独立集合問題と 2 部クリーク被覆問題を対象とする。

(1) 独立集合問題とは、グラフが与えられたときに互いに辺で結ばれていない頂点の集合で最大のものを見つける問題である。シャ

ノンの通信容量に関する考察にも現れる有名な問題で、多くの重要な組合せ問題が独立集合問題として定式化できる。

この問題は NP 困難問題で近似アルゴリズムが多数研究されている。近年の研究では、近似の観点からも非常に難しい問題であることが分かってきた。一方、疎なグラフ（辺の本数が少ないグラフ）の場合には近似性能のよいアルゴリズムが得られることが分かっている。このようなグラフに対する研究ではグラフの最大次数や平均次数をパラメータとして近似性能を解析している。グラフの頂点に重みが付いた場合の独立集合問題（この場合は頂点の重みの和が最大となる独立集合を求める）は一般のグラフの独立集合問題を含む、より一般的な問題である。重み付き独立集合問題に対しては平均次数を用いる解析ができないことが以前より指摘されていた。

本研究では頂点に重みの付いたグラフに対し「重み付き次数」という新たな概念を提案する。これは一般のグラフの次数を自然に拡張したものであり、これを用いて重み付き平均次数が定義できる。この重み付き平均次数を測度として重み付き独立集合問題の近似アルゴリズムの性能を理論的に解析する。

(2) 2 部クリーク被覆問題は、与えられた 2 部グラフ（の辺集合）を最小個数の完全 2 部クリーク（の辺集合）で被覆する問題である。この問題は、研究代表者が取り組んでいる織機の縦糸の制御という実用上の問題から派生したものである。これまでに、縦糸の制御問題がブール行列のブールランクを求める問題に帰着できること、および、ブール行列のランク問題が 2 部クリーク被覆問題と同等であることが示されている。

本研究では、織機の縦糸制御に応用するための実用的アルゴリズムを開発する。これまでに2部クリーク被覆問題がグラフの彩色問題に変換できることを示し、それを利用した発見的アルゴリズムを提案した。しかし、このアルゴリズムを用いて得られる解の最適性については理論的な保証がない。そこで、本研究では、2部クリーク被覆問題を直接解いて厳密解を得る方法を考える。厳密解が分かれば、提案した発見的アルゴリズムの性能（どの程度最適界を見つけているか）が推測できることになる。厳密解を得るために2部クリーク問題を整数計画問題として定式化し、公開のソルバーを用いて解く手法が考えられる。上で述べたように整数計画問題のソルバーの性能は近年、飛躍的に向上している。したがって、ソルバーの性能を最大限に引き出すように2部クリーク問題をうまく定式化することが重要である。これにより実用上の問題サイズならば厳密解を得ることができると可能性がある。

別のアプローチとして、グラフの極大2部クリークを列挙しておいて、その結果を用いて集合被覆の問題に定式化しソルバーを適用する手法も試みる。この方法は2部クリーク問題を直接的に整数計画問題として定式化する方法に比べ、変数の個数と制約式の個数が減少することが予想される。

さらに、2部クリーク被覆問題の理論的な近似限界を究明する。具体的には、PCP定理に基づき、この問題がAPX（多項式時間で最適解のサイズの定数倍の近似解が得られる問題のクラス）には入らないことを示す。

3. 研究の方法

(1) 独立集合問題の近似アルゴリズム設計と解析: 独立集合問題の近似アルゴリズムを設計し近似性能の解析を行う。具体的に

は、提案した測度のもとで、グリーディアルゴリズムと線形計画法を組み合わせたアルゴリズムを設計し、近似性能 $(\delta + 1)/2$ を達成することを示す。ここで、 δ は入力グラフの重み付き平均次数である。

(2) $k > 2$ とする。グラフ G が C_k フリーであるというのは、 G に大きさ k の閉路がないことをいう。この場合、 G にはサイズが $2n/(d+1+k)$ の独立集合が存在し、グリーディアルゴリズムによりこれを見つけることができる。ただし、 d はグラフの頂点の平均次数である。本研究では、このアルゴリズムを線形計画アルゴリズムと組み合わせることにより近似性能が $(d+1+k)/4$ の近似アルゴリズムを設計する。

(3) 2部クリーク被覆問題のアルゴリズムの開発: 本研究では2部クリーク被覆問題の厳密解を求めるアルゴリズムを提案する。これにより、これまでに提案している発見的アルゴリズムの性能を評価することが可能になる。本研究では、2部クリーク被覆問題を数理計画ソルバーを用いて直接解き厳密解を得る。先にも述べたように整数計画問題ソルバーの性能は近年、飛躍的に向上している。その性能を最大限に引き出すような定式化がこの研究のポイントである。本研究ではそのような定式化を試み性能（計算時間および使用メモリ）を計算機実験により確認する。

別のアプローチとして、2部クリーク被覆問題を集合被覆問題に定式化し数理計画ソルバーを適用する方法を研究する。すなわち、与えられた2部グラフの極大2部クリークを列挙できたとすると、元の問題は、与えられた2部グラフの辺集合を極大2部クリークの辺集合で被覆する問題と等価である。2部グラフの極大2部クリークを列

挙する高性能のアルゴリズムが知られており、これを利用する。

(4) $n \times n$ ブール行列 A の排他的階数とは、 $A=BC$ と $n \times n$ ブール行列 B, C の積で表すときの B の最小の列数のことである。本研究では織機の制御問題を、対応するブール行列の排他的ブール階数により定式化する。さらに、この問題が 2 部グラフのクリーク分割問題と等価であることを示す。

更に、2 部クリーク分割問題の理論的な近似限界を究明する。具体的には、PCP 定理に基づき、この問題が APX (最適解のサイズの定数倍の近似解が得られる問題のクラス) には入らないこと、すなわち定数近似が不可能であることを示す。

(5) 2 部クリーク被覆 (分割) 問題の AI 分野での応用として集合基底問題の正規基底を求める問題を考え、ヒューリスティックアルゴリズムを提案する。また、距離遺伝 2 部グラフのハミルトン閉路問題に対するアルゴリズムを与える。

4. 研究成果

本研究ではグラフの独立集合問題および 2 部クリーク被覆 (分割) 問題の近似アルゴリズムの設計・解析を行った。得られた研究成果は以下のとおりである。

(1) 独立集合問題に関しては重み付きグラフに対し「重み付き次数」の概念を提案し近似アルゴリズムを設計した。この成果は学術誌に発表した (文献⑨)。

(2) C_k フリーグラフの独立集合を求める近似アルゴリズムを提案し、学術誌に発表した (文献⑧)。

(3) 2 部クリーク被覆問題に対しては集合被覆アプローチによる解法を提案した。この方法は、2 部クリーク被覆問題を数理計画ソルバーを用いて直接解く方法と比較すると、整数計画問題として定式化した際の変数の個数と制約式の個数が大幅に減少することが確認できた。この成果は学会論文誌 (文献⑦) に発表した。

(4) 2 部クリーク分割問題に対しては、ブール行列の階数を用いた定式化を行った (文献②と⑥)。また、近似困難性の解析を行った (文献③④)。

(5) その他、集合基底問題の正規基底を求めるヒューリスティックアルゴリズムを提案した (文献⑤)。また、距離遺伝 2 部グラフのハミルトン閉路問題に対するアルゴリズムを与えた (文献①)。文献①では、距離遺伝 2 部グラフにおいて、ホールの定理に類似の条件がハミルトン閉路存在の必要十分条件であることを示した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 9 件)

①高須賀将秀, 平田富夫, 距離遺伝 2 部グラフ上のハミルトン閉路アルゴリズム, 京都大学数理解析研究所講究録, 査読無, 印刷中。

②松浦勇, 平田富夫, たて糸張力均一条件下における綜統枠数最小化, 電子情報通信学会コンピュータシミュレーション研究会技術報告, 査読無, COMP2011-43, 2011, pp. 53-60.

③H. Otsuki, T. Hirata, A new bound for the approximation ratio of the minimum biclique edge partition problem, Proceedings of CGGA, Dailian, 査読有, 2010, pp. 96-97.

④H. Otsuki, T. Hirata, Inapproximability of the minimum biclique edge partition problem, IEICE Transactions of Information & Systems, 査読有, Vol. E93-D, No. 2, 2010, pp.290-292.

⑤大月英明, 平田富夫, 集合基底問題の正規基底を求めるヒューリスティックアルゴリズム, 情報処理学会アルゴリズム研究会資料, 査読無, AL-128, 2010, pp. 1-10.

⑥I. Matsuura, M. Yagiura, T. Hirata, A textile design and the Boolean rank problem, IADIS International Conference on Applied Computing, 査読有, 2009, pp. 345-352.

⑦松浦勇, 柳浦睦憲, 平田富夫, ドビー織機の綜統枠数最小化問題に対する集合被覆アプローチ, 情報処理学会論文誌, 査読有, Vol.50, No. 6, 2009, pp. 1539-1548.

⑧I. Koura, T. Ono, T. Hirata, A note on the greedy algorithm for finding independent sets of C_k -free graphs, Information Processing Letters, 査読有, Vol. 109, 2009, pp. 485-489.

⑨A. Kako, T. Ono, T. Hirata, M. M. Halldorsson, Approximation algorithms for the weighted independent set problem in sparse graphs, Discrete Applied Mathematics, 査読有, Vol. 157, 2009, pp. 617-626.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

平田富夫 (HIRATA TOMIO)

名古屋大学・大学院情報科学研究科・教授

研究者番号: 10144205

(1) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし