

平成24年 5月17日現在

機関番号：10101

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2011

課題番号：21540001

研究課題名（和文） レゾナントパラメータを持つ超幾何微分方程式系の研究

研究課題名（英文） Study of hypergeometric systems with resonant parameters

研究代表者

齋藤 睦 (SAITO MUTSUMI)

北海道大学・大学院理学研究院・准教授

研究者番号：70215565

研究成果の概要（和文）：A から定まる半群環の微分作用素環の理論を応用することにより、A-超幾何系が D-加群として既約であることと、パラメーターベクトルがノンレゾナントであることが同値であることを示した。その過程において、A-超幾何系を固定した時、その剰余既約加群として現れる既約加群を全て求め、それが重複度 1 で現れることを示した。

A-超幾何系の既約な剰余加群の第 1 シジジー加群の有限生成系を計算する方法を示した。特に、A から生成される半群が単体的かつスコアードのとき、具体的な有限生成系を与えた。

研究成果の概要（英文）：We have proved that an A-hypergeometric system is irreducible if and only if its parameter vector is nonresonant, using the theory of the ring of differential operators on an affine toric variety. In the course of the proof, we have determined the irreducible quotients of an A-hypergeometric system.

We have presented a way of computing a finite system of generators of the first syzygy module of an irreducible A-hypergeometric quotient. In particular, if the semigroup generated by A is simplicial and scored, then an explicit system of generators has been given.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009 年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2010 年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2011 年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：超幾何系、D-加群、微分作用素環、トーリック多様体、レゾナント、半群環

1. 研究開始当初の背景

A-超幾何系は、超幾何関数のパラメータに対応するだけ新たな変数を導入することにより定義された微分方程式系（D-加群）である。

超幾何関数は元来、関数論はもとより、表現論、整数論、数理物理、統計学など様々な分野で重要な役割を演じるものであり、さらに、A-超幾何系の導入（及びその先駆の青本和彦氏の研究）により、より多くの分野との

関連も明らかにされてきた。例えば、超平面配置、ミラー対称性、整数計画法などである。

A-超幾何系の定義において変数を増やした最大の恩恵は、（トーラスによる）対称性が明示的に表されることである。その結果、種々の不変量が多面体の面などの組合せ論的な表示が可能となる。

従って、D-加群の理論において A-超幾何系は、代数幾何学におけるトーリック多様体や、

可換環論における半群環と同様の役割を果たす：即ち、十分多様な計算可能な族を提供する。よって、A-超幾何系は、他分野との関連においても重要であるとともに、D-加群それ自身としても極めて重要な存在である。

さて、パラメータベクトル \mathbf{b} を持つ A-超幾何系を $M_A(\mathbf{b})$ と書くことにする。 $M_A(\mathbf{b})$ の不変量に関する既知の結果の多くはパラメータに依らない場合か、パラメータがジェネリックのときのものであった。しかし、真に興味深いのはパラメータがレゾナントなときなので、パラメータがレゾナントなときの $M_A(\mathbf{b})$ の不変量の組合せ論的公式が問題となる。

2. 研究の目的

本研究は、Gelfand, Kapranov, Zelevinsky によって研究の基礎が築かれた超幾何微分方程式系 (A-超幾何系、または GKZ 超幾何系という) について、特にレゾナントパラメータを持つ場合について、代数解析的、組合せ論的に、その構造を明らかにすることを目的とする。

パラメータベクトル \mathbf{b} を持つ A-超幾何系 $M_A(\mathbf{b})$ はホロノミー系なので組成列を持つ。従って、「 $M_A(\mathbf{b})$ の組成列を求める」と「圏 \mathcal{O} の既約 D-加群の研究」が重要である。前者に付随する問題として、 $M_A(\mathbf{b})$ の rank の公式の完成や、A-超幾何イデアルのワイル閉包の計算、また、後者に付随する問題として、既約剰余加群の特性サイクルの組合せ論的記述、既約剰余加群の関係式の生成系の具体的記述なども目指す。

「ワイル閉包」はあまり広まっていない概念なので、少し解説しておく。ワイル代数の左イデアルのワイル閉包とは、その古典的解空間を変えずに最も微分方程式を増やしたものと定義される。従って、左イデアルの古典的な解空間に注目するときの自然な概念で、多項式環のイデアルの理論での「イデアルの根基」に相当すると言えよう。

3. 研究の方法

研究組織のメンバー 3 人は全員札幌在住なので、定時および適宜インフォーマルなセミナーを開き議論する。また、国内外の研究集会に積極的に参加し、様々な研究者と議論し、理論を進展させる。

計算機などを使い、例を多く計算し、一般の場合を予想する。

A-超幾何系を含む自然な圏として、圏 \mathcal{O} (単純リー代数の表現論における Bernstein-Gelfand-Gelfand の圏 \mathcal{O} の類似、A-超幾何系は Verma 加群の類似になる) がある。一方、A に付随するトーリック多様体上の微分作用素環 (A で生成される半群の半群環の微分作用素環) を $D(A)$ とすると、 $D(A)$

の上のある加群からなる圏 \mathcal{O} も考えられる。 $D(A)$ -加群の圏 \mathcal{O} の方が構造は簡明である。これら 2 つの圏 \mathcal{O} の間には自然な関手があるので、この関手を用い、A-超幾何系を含む圏 \mathcal{O} の研究を行うことができる。

4. 研究成果

(1) A-超幾何系はパラメータベクトルがジェネリックなときは D-加群として既約であるが、一般には既約でない。以前、圏 \mathcal{O} における既約加群を分類した：標数 0 の基礎体を K とする。このとき、A で生成される錐の面 τ と $K(A \cap \tau)/Z(A \cap \tau)$ の元 λ に対し、既約加群 $L(\tau, \lambda)$ が定まり、圏 \mathcal{O} における既約加群は全てこの形である。

この研究を踏まえ、A-超幾何系を固定したとき、その剰余既約加群として現れる既約加群を全て求め、それが重複度 1 で現れることを示した。

具体的に書こう。まず、パラメータベクトル \mathbf{b} と面 τ に対し、有限集合 $E_{\tau}(\mathbf{b})$ を以前定義した： $E_{\tau}(\mathbf{b}) := \{ \lambda \in K(A \cap \tau)/Z(A \cap \tau) \mid \mathbf{b} \cdot \lambda \in NA + Z(A \cap \tau) \}$ 。これを用いて、有限集合 $E(\mathbf{b})$ を $E(\mathbf{b}) := \{ (\tau, \lambda) \mid \lambda \in E_{\tau}(\mathbf{b}) \}$ と定義する。このとき、 $E(\mathbf{b})$ には自然な半順序が入る。次の定理を証明した：

定理： (τ, λ) が $E(\mathbf{b})$ の極小元であるとき、既約加群 $L(\tau, \lambda)$ は A-超幾何系 $M_A(\mathbf{b})$ の剰余加群になり、また、このときに限る。さらにこのとき、 $M_A(\mathbf{b})$ から $L(\tau, \lambda)$ への D-加群準同型写像のなすベクトル空間は 1 次元である。

また、この定理を用いて、A-超幾何系が D-加群として既約であることと、パラメータベクトルがノンレゾナントであることが同値であることを示した：これは、Gelfand 等が A から定まる半群環が Cohen-Macaulay のときに偏屈層を使った議論で示していたが、今回は Cohen-Macaulay という条件なしで、A から定まる半群環の微分作用素環の理論を応用することにより示した。

(2) 圏 \mathcal{O} における既約加群 L の多重斉次な nonzero 元を v とする。I を v のワイル代数 D における零化イデアル (I を L の第 1 シジジー加群という。) とすれば、L は D/I と表せる。I の有限生成系を具体的に求めるという問題について考察した。

明らかな生成元の他にどのウェイト空間から生成元をとれば良いかを A から生成される錐の面を使った言葉で明らかにした。これにより、I の生成系を通常の可換なグレブナー基底の理論を用いて計算することができる。また、A から生成される半群がスコアードのとき、ある面に関する生成系が、余次元 1 の面に関する生成系で生成されるための十分条

件を求め、さらに A から生成される半群が単体的かつスコアードのとき、有限生成系を具体的に記述した。

(3) A -超幾何系の重要な例として青本-Gelfand 系があるように、超平面配置の理論と A -超幾何系の理論とは密接な関連がある。超平面配置の理論においては斉次 1 階の微分作用素 (derivation) のなす加群の構造、とくに自由性が多くの研究者により研究されてきた。しかし、高階の微分作用素についてはあまり研究されていない。北海道工業大学の奥山豪 (連携研究者)、北海道大学の中島規博氏とともにジェネリックな超平面配置について、斉次高階の微分作用素のなす加群の自由性を決定し、自由でない場合は極小自由分解を構成した。これは 1 階のときの Yuzvinsky 氏の結果の一般化である。また、関連して、 m -jet 加群の transpose の極小自由分解も構成した。これは 1 階のときの Rose 氏と寺尾宏明氏による結果の一般化になっている。

もう少し具体的に述べよう。 n 次元ベクトル空間における r 枚の超平面からなるジェネリックな超平面配置を考える。 $D(m)$ をこの超平面配置に関する m 階斉次微分作用素の成す S -加群とする。ここで、 S は n 変数多項式環である。Holm により、 $n=2$ なら、全ての m について、 $D(m)$ は自由 S -加群である； $n>2$, $r>n$, $m=r-n+1$ なら、 $D(m)$ は自由 S -加群である； $n>2$, $r>n$, $m<r-n+1$ なら $D(m)$ は自由 S -加群でない；が既に示されてあった。さらに Holm は、 $n>2$, $r>n$, $m>r-n+1$ のとき $D(m)$ は自由 S -加群であろうと予想していた。また、自由でない $n>2$, $r>n$, $m<r-n+1$ の場合、Snellman によりベッチ数の予想がされてあった。

本研究では Holm の予想を肯定的に示した；即ち、 $n>2$, $r>n$, $m>r-n+1$ のとき $D(m)$ が S -加群として自由であることを示した。続いて、 $D(m)$ が自由でない場合、即ち $n>2$, $r>n$, $m<r-n+1$ のとき、組み合わせ的方法で ($m=1$ のときの Yuzvinsky の方法を一般化することで) S -加群 $D(m)$ の極小自由分解を具体的に与えた。その結果、この場合の Snellman によるベッチ数の予想も正しいことが分かった。

(4) A -超幾何系を定義する左イデアル (A -超幾何イデアル) のワイル閉包に関する先行する研究としては Matusевич によるものがあり、パラメータが ‘very generic’ なら A -超幾何イデアルのワイル閉包が自分自身に一致する (Weyl closed である) ことが示されている。その証明の過程で Matusевич は、 A -超幾何級数が fully supported であるという概念を定義し、パラメータがレジナントで

なく、さらに fully supported な A -超幾何級数解を持てば A -超幾何イデアルは Weyl closed であることを示した。

本研究では、まず、 A が斉次のとき、パラメータがレジナントでないという仮定を少し弱めた条件の下、fully supported な A -超幾何級数解を持てば A -超幾何イデアルは Weyl closed であることを示した。また、 A が斉次のとき、 A -超幾何イデアルが Weyl closed なら fully supported な A -超幾何級数解を持つことも示した。従って問題となるのは、パラメータがレジナントで上で掲げた「少し弱い条件」を満たさないときと、fully supported な A -超幾何級数解を持たない場合である。これらの点に関して A が 2 行からなる行列の場合に詳しく計算した。

(5) グロモフ-ウィッテン不変量のミラー対称性を用いた計算において重要な役割を果たすミラー写像についての幾何学的研究を行った。ミラー写像は、もともとミラー対称性から導かれる超幾何微分方程式の解を用いて構成されるものであったが、秦泉寺雅夫 (研究分担者) はこのミラー写像を、ある特殊なコンパクト化を行って得られるモジュライ空間の交点数 (グロモフ-ウィッテン不変量の類似物) の母関数として構成する方法を与えた。この構成を用いて、複素射影空間の超曲面に対するミラー予想を次数の低い有理曲線の場合に初等的に証明した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 6 件)

- ① Mutsumi Saito, First syzygies of irreducible A -hypergeometric quotients, in press, Journal of Pure and Applied Algebra (2012), DOI:10.1016/j.jpaa.2012.04.010.
- ② Norihiro Nakashima, Go Okuyama, and Mutsumi Saito, The Freeness and minimal free resolutions of Modules of Differential Operators of a Generic Hyperplane Arrangement, J. Algebra vol.351(1) 294-318 (2012), 査読有, DOI: 10.1016/j.jalgebra.2011.10.042, <http://hdl.handle.net/2115/48291>
- ③ Mutsumi Saito, Irreducible quotients of A -hypergeometric systems, Compositio Mathematica, Vol. 147(2) 613-632 (2011), 査読有, DOI:

10.1112/S0010437X10004987,
<http://hdl.handle.net/2115/48486>

- ④ Masao Jinzenji, Direct Proof of the Mirror Theorem of Projective Hypersurfaces up to degree 3 Rational Curves, *Journal of Geometry and Physics*, Vol. 61(8), 1564-1573 (2011), 査読有, DOI: 10.1016/j.geomphys.2011.03.014, <http://hdl.handle.net/2115/46875>
- ⑤ Mutsumi Saito, The spectrum of the graded ring of differential operators of a scored semigroup algebra, *Communications in Algebra*, Vol. 38(3) 829-847 (2010), 査読有, DOI: 10.1080/00927870902828611, <http://hdl.handle.net/2115/44901>
- ⑥ Mutsumi Saito, Critical modules of the ring of differential operators of an affine semigroup algebra, *Communications in Algebra*, Vol. 38(2) 616-631 (2010), 査読有, DOI: 10.1080/00927870902828603, <http://hdl.handle.net/2115/44781>

[学会発表] (計 3 件)

- ① Masao Jinzenji, Mirror map as generating function of intersection numbers, IX. International Workshop: LIE THEORY AND ITS APPLICATIONS IN PHYSICS, 21 June 2011, Varna, Bulgaria
- ② 齋藤 睦, The ring of differential operators on an affine toric variety, 研究集会「代数幾何学城崎シンポジウム」, 2010年10月28日, 城崎大会議館(兵庫県豊岡市城崎町)
- ③ 秦泉寺 雅夫, Mirror map as generating function of intersection numbers, 日本数学会「秋季総合分科会」一般講演, 2010年9月22日, 名古屋大学

6. 研究組織

(1)研究代表者

齋藤 睦 (SAITO MUTSUMI)

北海道大学・大学院理学研究院・准教授
研究者番号：7 0 2 1 5 5 6 5

(2)研究分担者

秦泉寺 雅夫 (JINZENJI MASAO)

北海道大学・大学院理学研究院・准教授
研究者番号：2 0 3 2 2 7 9 5

(3)連携研究者

奥山 豪 (OKUYAMA GO)

北海道工業大学・医療工学部・准教授
研究者番号：6 0 4 3 3 4 2 1