

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 5 月 29 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2011

課題番号：21540013

研究課題名（和文） 保型性持ち上げとラングランズ双対性の整数論

研究課題名（英文） Arithmetic of modularity lifting and Langlands duality

研究代表者

安田 正大（YASUDA Seidai）

京都大学・数理解析研究所・助教

研究者番号：90346065

研究成果の概要（和文）：研究代表者は山下剛氏と共同で、クリスタリン表現の法 p 還元の計算を、超幾何多項式等の従来使われなかった道具を導入して、今まで知られていなかった多くの場合に Wach 加群を具体的に構成する事により行った。また研究分担者の近藤と共同で、既約許容表現の ε 因子を、具体的な Hecke 作用素の固有値として記述し、また、既約許容表現が miraholic 型の合同部分群に関する不変ベクトルを持つための必要十分条件をさまざまな視点から記述した。その他、まだ発表等には至っていないが、Serre 予想および p 進表現の理論について、本研究を通じていくつかの知見が得られた。

研究成果の概要（英文）：In a joint work with Go Yamashita, I have determined the reductions modulo p of crystalline representations in many unknown cases, by explicitly constructing Wach modules and by introducing some new methods involving hypergeometric polynomials. I and Satoshi Kondo have succeeded in describing the epsilon factor of irreducible admissible representations as explicit Hecke eigenvalues and in giving several criterion for those representations to have “mirahoric” fixed vectors. I have obtained some other findings in Serre’s conjecture and p -adic representations which will be useful in my future study.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010 年度	900,000	270,000	1,170,000
2011 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,000,000	900,000	3,900,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：数論幾何学, L-関数, ガロア表現, ε -因子, 保型表現, ラングランズ双対性

1. 研究開始当初の背景

保型性持ち上げ定理について、Wiles および Taylor が一連の重要な技術を創りあげ、その応用として谷山志村予想の部分的解決が、さらにその応用として Fermat の最終定

理の証明が得られていた。その後 Taylor, Kisin 等多くの人々による手法の改良・開発により、保型性持ち上げ定理は谷山志村予想の完全解決、Serre 予想の解決、佐藤・Tate 予想の条件つき解決など華々しい応用

をもつに至っていた。

日本にはこの分野の専門家が少なく、国際的な研究情勢から立ち遅れた状態が続いていた。申請者は2008年3月、当時の同僚山下剛氏(現 豊田中央研究所)と共同で合宿を主催し、保型性持ち上げ定理とその応用に関する計12時間の講演を行った。これによって保型性持ち上げに関する、世界的に高準の研究を実施するための環境が整った。

2. 研究の目的

当初の研究目的は次の4点にまとめられる。

(1) 関数体の場合に $R = T$ 定理の確立および主種の精密化を行う。

(2) $R = T$ 定理確立の基礎となる局所変形環の環論的・幾何的性質についての研究を行う。

(3) 保型性持ち上げに関連する手法を用い、有理数体上の2次元 $\text{mod } \ell$ Galois 表現に関する Serre の予想の一般化を試みる。

(4) $R = T$ 定理の主張を、大域体の Galois 表現から高次元の数論的多様体の基本群の表現へと拡張することを試みる。

3. 研究の方法

(1) 本研究は純粋数学における理論の構築を目標とする基礎的研究である。そのため大がかりな実験装置は特に必要ではない。最適な環境の下で十分な時間を確保して研究に取り組むことが、研究を推し進めるうえで最も重要な手法である。

(2) 純粋数学の研究においては、さまざまな背景を持つ研究者との打ち合わせを重ねることが、研究を推し進めるうえで最も有効な方法である。そのため、国内外への研究集会への参加、および関連分野の研究者と研究打ち合わせをするための出張を積極的に行った。

(3) 研究の可能性の探索および細部の完成のためには、すでに知られている関連分野の理論や、新しく作り上げられた理論についての正確な知識が必要である。そのため本研究と関連のある専門的内容を扱った図書を購入手、必要とする知識の習得を行った。

(4) 2010年度後半、(論文の修正に関する) 予期せぬ用務が長期間入り、当該研究への専念が困難となる時期があったが、それを克服するため、 p 進表現の分類空間の研究に将来重要となると思われる Colmez による $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ についての局所 Langlands 対応に関する理論の幾何学的解釈の可能性について今井直毅氏と議論を行い、2011年度以降の研究に備えた。

4. 研究成果

(1) 研究代表者は、正標数 p の大域体上の法 ℓ 保型表現の理論について、Pal 氏と議論を重ねた結果、目的の達成のためには、古典的な場合とは異なり、既約とは限らない、一般には長さ有限の表現を考察する必要があることがわかった。そのような表現のなかで適当な条件をみたすクラスを定義し、そのクラスに属するものが、局所成分のテンソル積に分解することを示した。目的の達成のためにはこの結果だけでは不十分であり、次に行うべきことは、適当な条件をみたす局所体上の $GL(n)$ の ℓ 進係数既約許容表現について、Whittaker 模型から定まる整構造と、本質的ベクトルの定める整構造との関係を調べることである。

(2) 研究分担者の田口は、ガロア表現のモジュライの基礎理論を整備し、数論に於ける幾つかの問題に応用した。特に、研究分担者の平之内との共同研究により、頂切離散附値環の分岐制限付き拡大の圏を定義し、それがあらゆる choice に依らない事や、完備離散附値体の分岐制限付き拡大の圏と圏同値になる事等を証明した。また実二次体の場合の Serre の保型性予想に関連して、二次体の $\text{mod } 2$ Galois 表現の非存在と有限性に関する興味深い成果が得られた。

(3) 研究代表者は山下剛氏(豊田中央研究所)と共同研究を行い、 p 進数体の階数 2 のクリスタリン表現の法 p 還元計算を、Hodge-Tate 重さの差が $(p^2 - 1)/2$ 以下の多くの場合に、Wach 加群を具体的に構成する事により行った。超幾何多項式という、この分野では従来使われていなかった道具を用いると、Wach 加群の構成が可能になることが本研究を通じて明らかになった。これは新境地を切り開く画期的な成果であり、整係数 p 進 Hodge 理論に新しい展開をもたらすことが期待される。

(4) ①ラングランズ双対性の理解のためには L 因子、イプシロン因子の理解が重要である。逆定理の適用の際に ε 因子についての理解が必要となる。研究代表者と研究分担者の近藤は、既約許容表現の ε 因子とその中心指標の ε 因子との比を、具体的な Hecke 作用素の固有値として記述した。

②研究代表者および分担者の近藤は、①の研究をさらに推し進め、既約許容表現が mirabolic 型の合同部分群に関する不変ベクトルを持つための必要十分条件をさまざまな視点から記述した。

③研究分担者の田口は、ガロア表現の合同について考察し、Rasmussen-Tamagawa 予想(とその函数体類似)に応用した。

④分担者の平之内は平山聖司氏との共同研究を行い、ふたつの楕円曲線の積に対する cycle 写像の像を決定した。また、完備離散付値体に対する Milnor K 群 に付随する filtration の構造を求めた。

(5) 発表等の目に見える形にはまだ至っていないが、本研究を通じて以下の重要な知見が得られた。これは研究代表者のこれからの研究に生かされる予定である。

① 研究代表者は、Serre 予想の証明の手法についての解釈の検討を行った結果、ガロア表現の整合系の全体を統制する、大域的なモジュライ空間の理論を定式化し、その空間の連結性を証明することが重要であるという認識に到達した。研究代表者はモジュライ空間の定式化の候補を与えた。

② Colmez による $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ についての局所 Langlands 対応に関する理論の幾何学的解釈の可能性について今井直毅氏と議論を行った結果、 p 進表現に関する現行の理論はベクトル束に関する Simpson の理論と多くの共通点があり、Simpson の理論における問題意識を p 進表現の理論に積極的に導入することが今後の研究のために重要であるという認識に到達した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 19 件)

1. Satoshi Kondo, Seidai Yasuda, Zeta elements in the K-theory of Drinfeld modular varieties, Math. Ann. (査読有) に受理済み (オンライン版は 2011 年に出版), doi: 10.1007/s00208-011-0735-3
2. Satoshi Kondo, Seidai Yasuda, Local L and Epsilon factors in Hecke eigenvalues, Journal of Number theory (査読有), 132 Issue 9 (September 2012), 1910--1948 に掲載予定. doi: 10.1016/j.jnt.2012.03.002
3. Toshiro Hiranouchi, Milnor K-groups modulo p^n of a complete discrete valuation field, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. (査読有), Volume 88, Number 4 (2012), 59-61. doi: 10.3792/pjaa.88.59
4. Satoshi Kondo, Seidai Yasuda, On the second rational K-group of an elliptic curve over global fields of positive characteristic, Proceedings of the London Mathematical Society (査読有), 102 Issue 6 (June 2011), 1053-1098. doi: 10.1112/plms/pdq045
5. Satoshi Kondo, Seidai Yasuda, Product structures in motivic cohomology and higher Chow groups, Journal of Pure and Applied Algebra (査読有), 215, Issue 4 (April 2011), 511-522. doi: 10.1016/j.jpaa.2010.06.003
6. Seidai Yasuda, Non-negativity of the Fourier coefficients of eta products associated to regular systems of weights, Publ. RIMS, Kyoto Univ. (査読有) 46, Issue 3 (2010), 549-563 doi: 10.2977/PRIMS/17
7. Toshiro Hiranouchi, Yuichiro Taguchi, Flat modules and Groebner bases over truncated discrete valuation rings, Interdisciplinary of Information Sciences (IIS), Proceedings of Japan-Korea Joint Seminar on Number Theory and Related Topics 2008 (査読有), 16 (2010), no. 1, 33--37. doi: 10.4036/iis.2010.33
8. Hiroaki Nakamura, Hiroshi Tsunogai, Seidai Yasuda, Harmonic and equianharmonic equations in the Grothendieck-Teichmüller group. III, Journal of the Inst. of Math. Jussieu (査読有) 9 Issue 2 (April 2010), 431--448 doi: 10.1017/S1474748009000115
9. Seidai Yasuda, The product formula for local constants in torsion rings, J. Math. Sci. Univ. Tokyo (査読有), 16, No. 2 (2009), 199-230 <http://journal.ms.u-tokyo.ac.jp/pdf/jms160202.pdf>
10. Seidai Yasuda, Local constants in torsion rings, J. Math. Sci. Univ. Tokyo (査読有) 16, No. 2 (2009), 125-197 <http://journal.ms.u-tokyo.ac.jp/pdf/jms160201.pdf>
11. Toshiro Hiranouchi and Shinya Harada, Smallness of fundamental groups for arithmetic schemes, J. Number Theory (査読有), 129 (2009), no. 11, 2702--2712. doi:10.1016/j.jnt.2009.03.010

12. Anna Cadoret and Akio Tamagawa,
Stratification of Hurwitz spaces by closed
modular subvarieties,
Pure and Applied Mathematics Quarterly (査
読有), 5 (2009), no. 1, 227--253.
<http://www.intlpress.com/JPAMQ/p/2009/227-253.pdf>

13. Mohamed Saidi and Akio Tamagawa,
A prime-to- p version of Grothendieck's
anabelian conjecture for hyperbolic
curves over finite fields of
characteristic $p > 0$, Publ. RIMS (査読有),
45 (2009), no. 1, 135--186.
doi: 10.2977/prims/1234361157

14. Takeshi Saito,
Hilbert modular forms and p -adic Hodge
theory, Compositio Mathematica (査読有),
145 (2009), no. 5, 1081--1113.
doi: 10.1112/S0010437X09004175

[学会発表] (計 50 件)

1. Satoshi Kondo,
Mirahoric representations and the local
 L -factor, Integralble systems, random
matrices, algebraic geometry and
geometric invariants, 2012 年 2 月 22 日,
Steklov Institute, Moscow (ロシア)

2. 安田 正大,
Bernstein center I, II, 勉強会 「 p 進代
数群の表現論」, 2012 年 2 月 17 日,
横浜国立大学

3. 近藤 智,
 L 因子とイプシロン因子, 勉強会 「 p 進代
数群の表現論」, 2012 年 2 月 16 日,
横浜国立大学

4. Seidai Yasuda,
Some hypergeometric polynomials and
reductions of crystalline representations
with moderate Hodge-Tate weights,
Workshop on p -adic arithmetic geometry and
motives, 2012 年 1 月 25 日, 東北大学

5. Seidai Yasuda,
Stability of a higher Chow group of an
elliptic curve, Workshop on arithmetic
geometry 2011, 2011 年 10 月 12 日,
沖縄尚学高校

6. Satoshi Kondo,
Boundary maps to the supersingular points
and the evaluation of Drinfeld modular

Beilinson-Kato type elements, 2011 年 8 月
19 日, Dongguk University, Gyeongju, Korea

7. Satoshi Kondo,
On the values of Drinfeld modular
Beilinson-Kato type elements at
supersingular points, Workshop on the
Arithmetic of Function Fields, 2011 年 6
月 14 日, Imperial College London, UK

8. 近藤 智, 安田 正大,
局所 L 因子と局所イプシロン因子のヘッケ
固有値による表示, 日本数学会年会,
2011 年 3 月 20 日, 震災のためアブストラク
トの発行により成立

9. 田口 雄一郎,
局所体の Galois 表現の合同とその大域的
応用, 岡山大学講演会, 2011 年 2 月 23 日,
岡山大学

10. 近藤 智,
Expressions of local L and epsilon factors
in Hecke eigenvalues, Integrable systems,
random matrices, algebraic geometry and
geometric invariants, 2011 年 2 月 9 日,
The Steklov Mathematical Institute,
Moscow, Russia

11. 安田 正大,
Euler 系とその応用について, 北大数論幾何
学セミナー, 2011 年 1 月 6, 7 日, 北海道大学

12. 安田 正大,
Construction of extensions by \mathbb{K}_2 (概
説講演), 第 13 回白馬整数論オータムワー
クショップ「被覆群上の保型表現・保型形式」,
2010 年 11 月 4 日, 白馬ハイマウントホテル

13. 近藤 智,
On a formula expressing the local L and
epsilon factors in Hecke eigenvalues,
 L 関数の特殊値と数論幾何, 2010 年 10 月
8 日, 美山町自然文化村河鹿荘

14. 近藤 智, 安田 正大,
モテイヴィックコホモロジーと高次チャウ
群の積構造の互換性, 日本数学会秋季総合
分科会代数学分科会, 2010 年 9 月 24 日,
名古屋大学

15. 安田 正大,
安定跡公式と志村多様体, 第 18 回整数論サ
マースクール「アーサー・セルバーグ跡公式
入門」, 2010 年 9 月 8 日,
山中温泉 河鹿荘ロイヤルホテル

16. 安田 正大,
GL(n)のガロア表現と局所及び大域ラングラ
ンズ対応 (Introduction to Clozel,
Harris-Taylor and Taylor-Yoshida),
GSp(4) の数論を中心とした基礎的ワークシ
ョップ, 2010年8月6日, 大阪大学
17. 近藤 智,
モチビクコホモロジーの積構造について,
数論幾何学ワークショップ 2010, 2010年8
月5日, 沖縄尚学高校 視聴覚室
18. 安田 正大,
Iwasawa theory and higher Fitting ideals
Workshop on Iwasawa Theory over Function
Fields of Characteristic $p > 0$, 2010年4月
6日, Centre de Recerca Matemàtica (CRM),
Bellaterra, Barcelona, Spain
19. Satoshi Kondo,
On the rational K-group of an elliptic
surface over a finite field, umber Theory
Seminar, 2010年3月11日, Korea
Institute for Advanced Studies (Korea)
20. 近藤 智
関数体上の楕円曲線の有理 K^2 について,
北海道大学数論幾何学セミナー, 2010年2
月20日 北海道大学
21. Anna Cadoret and Akio Tamagawa,
A uniform open image theorem for
 ℓ -adic representations of ℓ -étale
fundamental groups, Sakura Workshop
`Torsion of abelian and rational points
on moduli spaces'', IMB, Bordeaux,
2010年1月25 - 28日,
22. 安田 正大,
モジュラ曲線の直積の K^3 元について,
東北大学・代数セミナー, 2010年1月14日,
東北大学
23. 安田 正大,
K-theory of elliptic curves and
stabilities, 野田モジュラー多様体研究集
会, 2009年12月24日, 東京理科大学
24. 近藤 智,
ドリinfeldt加群のモジュライの代数的 K
群の計算, 野田モジュラー多様体研究集会,
2009年12月22日, 東京理科大学
25. 安田 正大,
非アルキメデス素点での regulator 写像に
ついて, 慶應義塾大学・代数セミナー,
2009年12月3日, 慶應義塾大学
26. 安田 正大,
保型 Euler 系と L 関数の積分公式,
九大代数学セミナー, 2009年11月6日,
九州大学
27. 石川 佳弘,
 p -進簡約群の表現と局所 ε -因子, 京都大
学談話会 2009年10月28日. 京都大学
28. 平之内俊郎,
Smallness of fundamental groups for
varieties over finite fields, t -motives:
Hodge structures, transcendence and other
motivic aspects, 2009年10月1日
BIRS, Canada,
29. 安田 正大,
Regulators, periods, and special values of
automorphic L-functions over function
fields, t -motives: Hodge structures,
transcendence and other motivic aspects,
2009年9月28日, カナダ・バンフ国際研
究センター
30. 石川 佳弘,
保型的 L-関数の中心臨界値に関する
Baruch-Mao の結果について,
第12回整数論オータムワークショップ,
2009年9月10日 白馬ハイマウントホテル,
31. Akio Tamagawa,
Torsion of abelian schemes and rational
points on moduli spaces (joint work with
Anna Cadoret), Workshop `Anabelian
Geometry'', 2009年8月27日, INI,
Cambridge, (イギリス)
32. 安田 正大,
セール予想概説,
第17回整数論サマースクール「1進ガロア表
現とガロア変形の整数論」,
2009年8月20日, アピカルイン京都
33. 安田 正大,
Galois 表現サイドからの問題提起;
Possible problems and Hope, 保型表現の分
岐理論へ向けて: ε -因子の明示計算, 2009
年8月11日, 京都大学理学部
34. 平之内俊郎,
Pure weight perfect Modules on divisorial
schemes, 第8回広島整数論集会,
2009年7月24日, 広島大学
35. 田口 雄一郎,
頂切離散附値環の分岐について,

大岡山談話会, 2009年6月20日,
東京工業大学

36. 田口 雄一郎,
Extensions of truncated discrete
valuation rings, Modular Forms and
Function Field Arithmetic, a conference in
honor of Jing Yu's 60th birthday, 2009年
5月20日, National Taiwan University

[図書] (計0件)

[その他]
ホームページ等

特になし

6. 研究組織

(1) 研究代表者

安田 正大 (YASUDA Seidai)
京都大学・数理解析研究所・助教
研究者番号: 90346065

(2) 研究分担者

近藤 智 (KONDO Satoshi)
東京大学・数物連携宇宙研究機構・
特任助教
研究者番号: 30372577

田口 雄一郎 (TAGUCHI Yuichiro)
九州大学・数理学研究院・准教授
研究者番号: 90231399

平之内 俊郎 (HIRANOUCHI Toshiro)
広島大学・理学研究科。助教
研究者番号: 30532551

(3) 連携研究者

石川 佳弘 (ISHIKAWA Yoshihiro)
岡山大学・自然科学研究科・助教
研究者番号: 50294400

斎藤 毅 (SAITO Takeshi)
東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号: 70201506

玉川 安騎男 (TAMAGAWA Akio)
京都大学・数理解析研究所・教授
研究者番号: 00243105