

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年5月17日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2012

課題番号：21540020

研究課題名（和文） ユニタリ群のテータ対応の研究

研究課題名（英文） Study of the theta correspondence between unitary groups

研究代表者

今野 拓也（KONNO TAKUYA）

九州大学・数理学研究院・准教授

研究者番号：00274431

研究成果の概要（和文）：周期や Fourier 係数による保型形式の数論的構造の記述を、低次のユニタリ群の保型表現に拡張するため、それらの保型表現をテータ対応によって構成する研究を進めた。実ユニタリ群の間の局所テータ対応、および非アルキメデス局所体上の 2 変数ユニタリ群の間のそれを表現の内視論による分類を用いて記述した。

研究成果の概要（英文）：In order to analyze arithmetic structures of automorphic representations of unitary groups of low rank, we tried several way to construct such automorphic representations as theta lifts. We obtain description of local theta correspondence between rank 2 unitary groups over local fields (also those between arbitrary real unitary groups) in terms of the endoscopic classification.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1100,000	330,000	1430,000
2010年度	800,000	240,000	1040,000
2011年度	900,000	270,000	1170,000
2012年度	700,000	210,000	910,000
総計	3500,000	1050,000	4550,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：整数論，保型表現，テータ対応，endoscopy

1. 研究開始当初の背景

古典的な楕円保型形式はモジュラー曲線上の線束の切断として、自然に代数体やその整数環上の構造を備えている。整数論の研究に際しては、その構造は保型形式の CM サイクル上の周期や Fourier 係数を通じて捉えられる。志村、Waldspurger らによって得られたこれらの結果をレベル付き、つまり分岐を持つ保型表現に広げることは重要な研究課題である。

特殊直交群の保型表現に対しては、Gross-Prasad 予想やその池田・市野による精密化により、保型形式の周期と Fourier 係数を統合して扱うある種の枠組みが提案さ

れ、それらの値と保型表現に付随する L 関数の中心値との関係を予想している。

ユニタリ群は保型形式に付随するモチーフを与える志村多様体が存在し、しかも一般線型群の Galois ひねりとして得られるため、整数論の対象としてはもっとも魅力的な簡約代数群である。その上の保型形式は二次拡大上の一般線型群へのベースチェンジリフトを通じてよく研究されており、それを用いて付随する志村多様体のコホモロジーの研究も進んでいる。他方で類体の構成についての志村理論から近年の Galois 表現の構成への応用に至るまで、ユニタリ群は一般線型群以外では最も重要な保型表現論の対象であると言ってよい。したがって Gross-Prasad

および池田・市野の予想のユニタリ群での類似を考えることは大変興味深く、また大切な問題である。例えばランクの小さいユニタリ群の場合であっても、例えば Gross-Zagier 公式の GL_2 の Rankin 積 L 関数を 2 変数ユニタリ群の標準 L 関数と見直して精密化するなど、Hilbert 保型形式の周期や height に新たな光を当てるものとしても期待を集めている。

近年では保型表現の周期を調べる際に Jacquet の意味の相対跡公式を用いるのが主流になりつつある。相対跡公式は特定のタイプの周期を持つすべての保型表現を捉えることができるのが長所であるが、私は特定の保型表現に対象を限る代わりに具体的な周期の記述を得ることを目標としている。こうした目的には、具体的なテータ積分で周期を持つと期待される保型形式を実現できるテータ対応を用いるのが良いと考えられる。

さてランクの小さい特殊直交群は一般線型群やその内部形式の直積に同種であるため、一般線型群の保型表現の記述を用いることができ、研究が大きく進んでいる。一方でユニタリ群は 2 変数の場合であっても、複数の既約表現が同一の L 因子を共有する L 不可分性の問題が生じ、その研究には L 不可分な表現を見分ける(保型) endoscopy が不可欠である。

特殊直交群やシンプレクティック群などの古典群の既約表現および保型表現については、Arthur が endoscopy を用いた分類記述を発表している。ユニタリ群の場合は D. White による基礎的な研究の後しばらく進展がなかったが、ごく最近になって C.P. Mok が取り組んでいると聞いている。

2. 研究の目的

当研究の応募時にはユニタリ群の既約表現および保型表現の endoscopy による分類を用いてテータリフトを決定することを目標としていた。しかし上に述べたようにユニタリ群の場合の分類は私の期待する形では進展しなかったため、それにはまだ多くの技術的課題があるように思われる。

そこで 2 変数または 4 変数ユニタリ群など非自明な endoscopy を持つがランクが小さい群に対して、その保型表現の数論的構造を endoscopic classification を用いて記述することは大切なステップであると考えた。背景でも述べたように、それによって古典的な楕円保型形式や Hilbert 保型形式の周期などを新たな方向から捉えることができると期待されるからである。

ユニタリ群の局所テータ対応については、Harris-Kudla-Sweet が doubling 法により局所体上のユニタリ群のペアの Weil 表現を構成し、さらに非アルキメデス的な場合に、それで定まる局所 θ 対応 (Howe 双対性) が (特別な表現に対しては) 標準 L 因子の関数等式で統制されるという結果を得ていた。さらに Prasad は直交群上の保型形式の周期についての Gross との共同研究などの経験を受けて、ユニタリ群の局所テータ対応を Vogan による局所 Langlands 対応予想で記述する予想を提出している。

私は前年度までの研究に於いて、Harris-Kudla-Sweet の定義した局所テータ対応をアルキメデス的な場合に計算した。また Harris-Kudla によるいわゆる清水・Jacquet-Langlands リフトの逆リフトを用いて 2 変数ユニタリ群の dual pair で少なくとも一方が準分裂な場合に、それらの間のテータ対応を記述した。さらに 2 変数ユニタリ群の表現の endoscopy を用いた分類を計算し、この分類について上記のテータ対応が Prasad の予想に従っていることを証明した。またこの結果を用いて 3 変数ユニタリ群に沿った周期を備えた 4 変数ユニタリ群上の保型表現を構成した。このうち特に実ユニタリ群の場合については、J.-S. Li, A. Paul らが計算した同じサイズのユニタリ群の間の局所テータ対応を、(Weil 表現の定義が異なる) Harris-Kudla-Sweet のバージョンに対しても決定した。

ところがこれらの保型表現の周期を記述しようとする、2 変数ユニタリ群上の保型表現の方の Fourier 係数や周期について詳細な記述が必要になることがわかった。例えば Labesse-Langlands による $SU(2)$ の保型表現の記述では、アルキメデス成分の特殊ユニタリ群を定義するエルミート形式の符号数を必要に応じて反転し、両者を区別していない。しかし我々が目指す周期の記述には 2 変数ユニタリ群を定める符号数そのものも影響する。非アルキメデス成分においても性格は異なるが、表現の指標の振る舞いについての明示的な情報が必要になる。

当研究ではまず実ユニタリ群の endoscopy に若干の人工的な補助データを加えて、それが Vogan の Langlands 分類に相当するような明示的な表現の分類を与えるように変形することを目標とした。前研究で得られた同サイズの実ユニタリ群の間の局所テータ対応の記述は Vogan の Langlands 分類によっているので、これと併せて局所テータ対応の endoscopy との関係を明らかにすることも目指していた。

一方、非アルキメデス局所体上のユニタリ群については Labesse-Langlands, Rogawski らの結果でカバーされていない非等方的な 2 変数ユニタリ群の表現の指標を明示的に書く必要があった。これにより周期の局所類似が計算できるほか、前研究で扱えなかった場合にも 2 変数ユニタリ群の間の局所データ対応を記述する計画であった。

大域理論、すなわち保型形式に関しては上で目標に挙げた局所理論の帰結を活用することはもちろんであるが、前研究で得られた 2 変数および 4 変数ユニタリ群の保型表現の L 関数を計算することを目指した。特に 4 変数ユニタリ群の場合については、D. Jiang, Soudry らとの連絡から、6 変数特殊直交群の L 関数の理論を活用することを目指した。

3. 研究の方法

2009 年度前半は授業負担が非常に多かったため、研究出張を行うことが困難であった。そこで翌年度のサマースクールで講演が予定されていた九大数理の研究者の安田貴徳君と、国内の研究者を招いてほぼ月一回のペースで endoscopy と Arthur-Selberg 跡公式についてのセミナーを続けた。

前期の終わりには、レンヌ大学で行われた p 進数論幾何学の集會に出席して簡約群の p 進表現について情報交換を行い、その後パリ南大学の Henniart 氏を訪問して議論を行った。一方で、国内外の保型形式の周期に関する専門家を集めて行われた「整数論オータムワークショップ」に出席し、おもに周期の局所類似について多くの重要な示唆を受けることができた。年末には金沢大学で Arthur-Selberg 跡公式に関するミニワークショップを行った。一方、前研究で得ていた 4 変数ユニタリ群の合同関係や p 進 L 関数への応用について、年度末に室蘭工大の桂田英典氏を訪ねて集中セミナーを行い、有用な議論をすることができた。

2010 年度の前半には局所体やアデール環上の半単純単連結群の被覆群について文献の収集、整理を行い、それについて京大の池田保氏らと小規模研究集會を京大および名大で行って、理解の共有と正確化をはかった。被覆群上の保型表現をテーマに行われた「整数論オータムワークショップ」に参加して、同内容について概説を行い、参加していた国外の研究者と情報交換を行った。一方で、前年度から考察していた endoscopy と Arthur-Selberg 跡公式の安定化について、第 18 回整数論サマースクール「Arthur-Selberg 跡公式入門」で 2 日に渡り

講義を行った。また長年に渡り endoscopy における最大の障害であった「基本補題」とその B. C. Ngo による解決について数学会秋季総合分科会(名大)での企画特別講演および、RIMS 研究集會「代数的整数論とその周辺」で概説した。これにより endoscopy の幾何的側面や様々な補助データの役割を深く理解できた。

2011 年度は懸案であった実ユニタリ群の endoscopy の明示的な計算を進めた。L 因子を共有する既約表現にラベル付けをする際に必要となる移行因子の正規化について、自然だと思われる方法を模索した。旅費が限られていたこともあり、主に関連分野の国内の研究集會に参加して、議論や情報交換を行った。

最終年度はデータ対応で得られる保型表現と深い関係にある留数スペクトルの構成を考察し、北大数論幾何セミナーおよび「整数論オータムワークショップ」で報告を行った。一方で保型表現の一般的な構造について京大の池田保氏と岡山大の石川佳弘氏を訪ねて数回のミニ研究集會を行った。

4. 研究成果

まず実ユニタリ群の局所データ対応の記述の精密化に向けて以下の結果を得た。

L 不可分性はある種の Galois コホモロジーで記述される共役類の問題によって引き起こされる。P 進簡約代数群の Galois コホモロジーは余中心のそれに帰着されるため、Langlands 双対群で記述されて endoscopy の定式化と整合している。この帰着は実簡約代数群では成立しないため、アドホックな方法で endoscopy を扱うのが現状である。感覚的には個々の群の中の共役類は小さくなるが、群の同型類が増えて p 進軍の場合に対応するだけの endoscopy が生じる。

そこで実ユニタリ群の endoscopy のコンビナトリアルな記述を少し変形して、すべての内部形式を同時に扱う定式化を行った。この設定で新たに Langlands-Shelstad の移行因子を正規化する方法を提案し、それに関する二乗可積分表現からなる L パケットの endoscopic 指標等式を計算した。

Vogan の Langlands 分類では、非等方的(コンパクトな)ユニタリ群の有限次元表現を L パケット内の原点としており、前回の研究で我々が得た局所データ対応の記述もこれを用いている。一方で endoscopy による記述ではもっともコンパクトから遠い準分裂ユニタリ群の Whittaker 模型を持つ (generic な) 表現を原点としている。今後はこの 2 つの記述の間の関係を明らかにすることで、

endoscopy を用いた局所テータ対応の記述を目指している。上述の結果は補助データの内容が技術的に過ぎるため、その同期であった局所テータ対応の結果を得た時点でまとめて論文として発表する計画である。

次に上記のアルキメデス成分での記述の変更を踏まえて、2変数ユニタリ群の間のテータ対応を考察した。テータ対応を考える2つの群のうち、少なくとも片方が準分裂な場合にそれらの間の局所テータ対応を endoscopy による表現の記述を用いて計算していたが、この場合に大域的な保型表現のテータ対応を決定した。ただしその際に低次のシンプレクティック群と直交軍の間のテータ対応が L 因子、 ε 因子や endoscopy を用いて、望むべき形に記述されることを仮定しなくてはならないことも明らかになった。この記述を証明する方法も考えており、現在、次の研究課題のもとで計算を進めている。こちらについても現在論文を作成しており、4変数ユニタリ群の上の保型表現の構成についてはこの内容を受けて改訂中である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 0 件)

[学会発表] (計 12 件)

- ① 今野拓也, p 進古典群の構造, p 進代数群の調和解析小研究集会, 東京大学, 2013年3月30日.
- ② 今野拓也, Residual spectrum for reductive groups, The 15th Hakuba Autumn Workshop on Number Theory Automorphic Forms, Special Values of L-Functions, Congruences and Selmer Groups, 白馬ハイマウントホテル, 2012年10月30日.
- ③ 今野拓也, アデル群上の Height 関数について, 岡山大学保型形式ミニ研究会, 2012年10月13日.
- ④ 今野拓也, Residual spectrum for reductive groups I, II, 北大数論幾何学セミナー, 2012年9月13日, 15日.
- ⑤ 今野拓也, 截頭作用素について, 保型形式ミニワークショップ, 岡山大学, 2012年6月23日.
- ⑥ 今野拓也, 強近似定理について, 保型形式ミニ研究会, 鹿児島大学, 2012年5月20日.
- ⑦ 今野拓也, Yuen-Zhang-Zhang による Gross-Zagier 公式の新証明について, 金沢保型形式ミニ研究会, 金沢大学サテライトプ

ラザ, 2012年1月6日.

⑧ 今野拓也, 階数 2 の準分裂群上の CAP 保型形式, 整数論セミナー, 室蘭工業大学, 2010年2月13日から15日.

⑨ 今野拓也, Fundamental lemma and its proof after Bao Chau Ngo, RIMS 研究集会「代数的整数論とその周辺」, 京都大学数理解析研究所, 2010年12月10日.

⑩ 今野拓也, Coverings of simple local and adelic groups, 第13回白馬整数論オートムワークショップ「Automorphic representations, automorphic forms on covering groups」, 白馬ハイマウントホテル, 2010年11月3日.

⑪ 今野拓也, 保型内視論における基本補題とその証明---Waldspurger, Laumon, Ngo による, 日本数学会秋期総合分科会, 名古屋大学, 2010年9月25日.

⑫ 今野拓也, 内視論入門、移行因子と基本補題、楕円項の安定化、玉河数について (全4回), 第18回整数論サマースクール「Arthur-Selberg 跡公式入門」, 河鹿荘ロイヤルホテル (石川県), 2010年9月8-9日.

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

○取得状況 (計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

[その他]

ホームページ等

<http://knmac.math.kyushu-u.ac.jp/konno/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

今野拓也 (KONNO TAKUYA)

九州大学・大学院数理学研究院・准教授

研究者番号: 00274431