様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２４年３月３１日現在

機関番号：３２６１２
研究種目：基盤研究（Ｃ）
研究期間：2009～2011
課題番号：２１５４００６２
研究課題名（和文）　有限生成群の剛性および固定点性質

研究課題名（英文）　Rigidity and fixed-point property of finitely generated groups

研究代表者
井関 裕靖（IZEKI　HIROYASU）
慶應義塾大学・理工学部・教授
研究者番号：90244409

研究成果の概要（和文）：群が非常に限定的な空間に対してしか作用し得ないとき、その群は剛性をもつと言われる。また、ある空間 Y への群 Γ の作用が必ず固定点をもつとき、群 Γ は Y に対する固定点性質をもつと言う。群の固定点性質は剛性の一つの現れと見ることができる。最近の研究の成果は、剛性をもつ群は従来考えられてきたよりも多く（あるいは高い密度で）存在するということを示唆している。本研究は、この現象を確率論的な視点から明らかにした。すなわち、ある仕方で群を与えたとき、非常に高い確率で強い固定点性質をもつ群が現れることを証明した。

研究成果の概要（英文）：A group G is said to have rigidity, if the space accepting the action of G is very restrictive. A group G is said to have fixed-point property for a space Y, if every action of G fixes a point in Y.　Recent development of mathematical research suggests that there are plenty of groups having rigidity.　We proved that, in a certain model, groups have strong fixed-point property with high probability.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2009 年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2010 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2011 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総　計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：微分幾何学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：有限生成群、剛性、固定点性質、調和写像

１．研究開始当初の背景

有限生成群の固定点性質は、その群の種々の興味深い性質と関係しているが、これまでは, Kazhdan の性質(T)や群の非線形性との関わりを主な動機として研究されていた。例えば, Kazhdan の性質(T)は Hilbert 空間への固定点性質と同値であるし、有限生成群の非線形性は Hilbert 空間、SL(n,R)に付随する非正曲率 Riemann 対称空間、および PGL(n,Qp)に付随する Bruhat-Tits ビルディングに対する固定点性質から導かれる。

Hilbert 空間に対する固定点性質、すなわち Kazhdan の性質(T)については、ユニタリ表現論等関係する他の分野からのアプローチもあり、以前から多くの研究がなされてきた. このような群は、その構成が必ずしも容易で

はなく、また、その特徴的な性質のゆえもあり、従来、例外的あるいは散在的な群だと考えられてきた。しかしながら、ランダム群([10])、あるいは有限生成群の集合に定義されるある種の位相に関する最近の研究成果([8])から、Hilbert 空間に対する固定点性質をもつ群が非常に豊富に存在することが徐々に分かってきてはいた。

群の固定点性質の判定条件の研究[3]、[4]、および[5]においては，ΓからYへの同変写像のエネルギー、あるいはこのエネルギーを最小にする写像が重要な役割を果たす。群作用の研究に対するこのようなアプローチの起源は、Corlette [1] による Sp(n,1) (n >1)の格子のアルキメデス的超剛性の研究にある。 この先駆的な研究に続き、Mok-Siu-Yeung [7], Jost-Yau [6] は「階数が 2 以上の単純 Lie 群 G の一様格子Γの単連結非正曲率 Riemann 多様体への等長的作用が、その幾何学的境界まで含めて固定点を持たないならば、その作用は G に付随する対称空間へのΓの自然な作用と本質的に一致する」ことを対称空間から非正曲率 Riemann 多様体への調和写像を用いて証明した。この結果は, Margulis 超剛性のある種の拡張と位置づけられる。

M.-T.Wang [9] はこの手法を離散化し、単体複体から CAT(0)空間への調和写像を用いて、局所コンパクトな CAT(0)空間への有限生成群の等長的作用に関する弱い形の固定点定理を示した。その後, M.Gromov [2] と井関-納谷 [3] は独立に Wang の手法および結果を一般化した。この方向の研究は[4]、[5]でさらに推し進められ，有限生成群そのものから CAT(0)空間への同変写像に対して同様の議論が展開されつつあった。

これらの手法を用いて、強い固定点性質をもつ群が豊富に存在することを、これまでに知られている以上に明確な形で示すことが可能だと考えて、本研究に取り組んだ。

この項目の参考文献

[1] K. Corlette, Archimedian superrigidity and hyperbolic geometry}, Ann. of Math., 135 (1992), 165--182.

[2] M. Gromov, Random walk on random groups}, GAFA, 13 (2003), 73--146.

[3] H. Izeki and S. Nayatani, Combinatorial harmonic maps and discrete-group actions on Hadamard spaces, Geom. Dedicata, 114 (2005), 147-188.

[4] H. Izeki, T. Kondo and S. Nayatani, Fixed-point property of random groups, Annals of Global Analysis and Geometry, 35 (2009), 363—379.

[5] H. Izeki, T. Kondo and S. Nayatani, N-step energy of maps and fixed-point property of random groups, to appear in Groups, Geometry, and Dynamics.

[6] J. Jost and S.-T. Yau, Harmonic maps and superrigidity,Differential geometry: partial differential equations on manifolds, Proc. Symp. Pure Math., 54-1 (1993), 245-280.

[7] N. Mok, Y.-T. Siu and S.-K. Yeung, Geometric superrigidity, Invent. Math., 113 (1993), 57--83.

[8] Y. Shalom, Rigidity of commensurators and irreducible lattices, Invent. Math., 141 (2000), 1-54.

[9] M.-T. Wang, Generalized harmonic maps and representations of discrete groups, Comm. Anal. and Geom., 8 (2000), 545--563.

[10] A. Zuk, Property (T) and Kazhdan constants for discrete groups, GAFA, 13 (2003), 643--670.

２．研究の目的

上記の研究の背景を踏まえ、Hibert 空間を含む広いクラスの距離空間に対する固定点性質をもつ群が非常に多く存在することを明らかにする。

３．研究の方法

有限生成群Γが距離空間Yに作用しているとき、ΓのΓ自身への左からの積による作用と、Y へのΓの作用に関して同変な写像を考える。有限生成群Γが与えられると、その表示からΓ上に標準的なランダム・ウォークが定まり、このランダム・ウォークを用いて、同変写像の n ステップ・エネルギーを定義することができる。n>k に対し、n ステップ・エネルギーと k ステップ･エネルギーの比を考えると、これは同変写像の像（群作用の軌道）の広がり具合を捉えている。この比が大きくないときには、この群の作用が固定点をもつ（一点

のみからなる軌道をもつ）ことを示し、これを用いて、有限生成群の固定点性質を導くことを試みた。ここで用いられるのはリーマン幾何的な手法の CAT(0)空間へのある種の拡張である。

固定点性質の対象となる距離空間として、広い意味での非正曲率性をもつ CAT(0)空間を考察の対象とした。これらの空間は一般には特異性をもつ。連携研究者の納谷信氏と以前に行った共同研究で、この特異性を測る不変量を定義していた。比較的簡単な考察から、この不変量がそれほど大きくない場合には、上のエネルギーの比による判定条件が有効なことが期待されていた。そこで、この不変量がそれほど大きい値をとらないような CAT(0)空間に対しては、強い固定点性質をもつ群が多く存在することが証明できると考えた。実際には、確率論的な意味でのこの主張、すなわち、あるランダムな仕方で有限表示群を与えたとき、非常に高い確率で強い固定点性質をもつ群が現れることの証明を試みた。ここでは、群の生成元を固定した上で、以下のような二通りの群の与え方を考察した。

(a) 与えられた適当な条件を満たす有限グラフの無限列に対し、その辺集合に生成元を対応させ、グラフに現れる閉路に対応する語を関係式とする（グラフ・モデルのランダム群）。
(b) 同じ長さをもつ（既約ではない）語の集合から、決められた割合で関係式を選ぶ（プレイン・ワード・モデルのランダム群）。

また、様々な CAT(0)空間に対して上述の不変量の評価を与え、例えば、PGL(n,Qp)に付随する Bruhat-Tits ビルディング等の具体的な空間に対する固定点性質をもつ群が豊富に存在することを示すことも試みた。

平成 21 年度、22 年度、平成 23 年度とこれらの研究を、ほぼ平行して行った。上述の CAT(0)空間の特異性を測る不変量については、連携研究者の納谷信氏と共同で研究を進めた。また、研究協力者の近藤剛史氏も、この不変量の研究に参加した。

４．研究成果

まず、与えられた適当な条件を満たす有限グラフの無限列を用いてランダムに関係式を与えたときに得られる有限表示群に対し、上述のエネルギーの比が、与えられた有限グラフのラプラシアンの固有値と非常に近い振る舞いをすることを示した。正確には、上述のエネルギーの比が、非常に高い確率で、与えられた有限グラフのラプラシアンの固有値と空間の特異性を測る不変量を用いて下から抑えられることを証明した。これにより、グラフの列として、ラプラシアンの固有値が下から一様に抑えられた有限グラフの列（エクスパンダーグラフと呼ばれる）を選べば、グラフ・モデルのランダム群が、空間の特異性を測る不変量が上から一様に抑えられた空間の族に対する固定点性質をもつことが導かれる。これは、非常に広いクラスのCAT(0)空間に対して固定点性質をもつ群が、豊富に存在することを主張する、「研究の目的」で述べたことを裏付ける興味深い成果である。ここで用いた固定点性質をもつための十分条件は、有限生成群 Γ からCAT(0)空間Yへの同変写像のn-ステップエネルギーと1-ステップエネルギーの比により記述されるもので、Gromovにより主張が述べられ、研究代表者と連携研究者、研究協力者により一般の場合の証明が与えられた。これらの研究成果は、発表論文欄の②の論文にまとめられている。

上述の成果より一般的な結果を得るために、同変写像のn-ステップエネルギーとk-ステップエネルギーの比に注目して研究を続けたところ、この比は Γ の表示から構成される有限グラフからYへの写像のRayleigh商と非常に似通った振る舞いをすることを突き止めた。この二つの値は一般には一致しないが、Γ の表示から構成される有限グラフからYへの写像のRayleigh商の値が、n-ステップエネルギーとk-ステップエネルギーの比を「非常に高い確率で」非常によく近似する。この観察の応用として、プレイン・ワード・モデルのランダム群が特異性のそれほど高くないすべての非正曲率距離空間に対する固定点性質をもつことを示すことができた。この結果は研究代表者の単著論文として発表論文欄の①の論文にまとめられている。

「研究開始当初の背景」欄でも述べた通り、本研究開始当初に知られていた種々の研究成果は、それまでに認識されていたより多くの群が強い固定点性質あるいは剛性をもつことを示唆していた。上述のように、本研究の研究成果はこれを裏付け、明らかにするものとなった。とくに、①で扱ったプレイン・ワード・モデルのランダム群は任意の有限表示群を含むランダム群のモデルである。したがって、この結果は非常に広い枠組みの下で（あ

る意味で）一般的な群が、強い固定点性質をもつことを主張していることになる。これまでの研究成果から示唆されたことを、このような形で数学的に明らかにした点に本研究の重要な意義がある。また、研究代表者は、この研究成果に興味をもったリール大学（フランス）の研究者から、2012年度の夏に招待教授としてリール大学を訪問することを依頼された。これも本研究の成果のインパクトの一つの現れである。本研究を基礎とした今後の研究の進展が、n-ステップエネルギーにより与えられる固定点性質の判定条件の幾何学的な意味、そして剛性現象および固定点性質の幾何学的背景の理解にさらなる進展をもたらすことが期待されている。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計５件）

① Hiroyasu Izeki, Fixed-point property of random qutients by plain words, Groups, Geometry, and Dynamics に掲載決定.

② Hiroyasu Izeki, Takefumi Kondo, and Shin Nayatani, N-step energy of maps and fixed-point property of random groups, Groups, Geometry, and Dynamics に掲載決定.

③ Hiroyasu Izeki and Shin Nayatani, An approach to superrigidity and fixed-point theorems via harmonic maps, Amer. Math. Soc. Transl. (2), 230 (2010), 135-160.

④ Hiroyasu Izeki, A fixed-point property of finitely generated groups and an energy of equivariant maps, ``Probabilistic Approach to Geometry'', ASPM 57 (2010), 171--188.

⑤ Hiroyasu Izeki, Takefumi Kondo, and Shin Nayatani, Fixed-point property of random groups, Annals of Global Analysis and Geom., 35 (2009), 363--379

〔学会発表〕（計３件）

① 井関裕靖，ランダム群の固定点性質，仙台シンポジウム 2011，2011 年 8 月 18 日，東北大学大学院情報科学研究科.

② 井関裕靖，同変写像のエネルギーと有限生成群の剛性，福岡微分幾何学研究会，2010 年 10 月 9 日，福岡大学.

③ 井関裕靖，ランダム群の固定点性質，第 56 回幾何学シンポジウム，2009 年 8 月 28 日，佐賀大学.

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
井関 裕靖（IZEKI HIROYASU）
慶應義塾大学・理工学部・教授
研究者番号：90244409

(2)研究分担者
該当なし

(3)連携研究者
納谷 信（NAYATANI SHIN）
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授
研究者番号：70222180