

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 5月11日現在

機関番号：12612

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2011

課題番号：21540072

研究課題名（和文） 3次元多様体の例外的手術と特殊な4次元多様体

研究課題名（英文） Exceptional surgeries of 3-manifolds and strange 4-manifolds

研究代表者

山田 裕一 (YAMADA YUICHI)

電気通信大学・大学院 情報理工学研究科・准教授

研究者番号：30303019

研究成果の概要（和文）：

3次元球面内の（双曲的）結び目に沿うデーン手術(Dehn surgery)でレンズ空間が生じる“例外的”な現象は「レンズ手術」と呼ばれ、低次元多様体論の研究課題となっている。本研究では、レンズ手術から特殊な性質をもつ4次元多様体が構成できるのではないか という発想で研究を進め、レンズ手術に関する代数トーション理論、異なる結び目から同じレンズ空間が生じる組、の2件について共著論文を完成した。

研究成果の概要（英文）：

Phenomenon that a Dehn surgery along a (hyperbolic) knot in the 3-sphere yields a lens space is called “lens space surgery” and is a subject in low-dimensional topology. Concerned with a question “Can we construct strange 4-manifolds by lens space surgeries?”, I wrote two papers as joint works : Torsion invariants related to lens space surgery. Pairs of distinct knots yielding same lens spaces.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2010年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2011年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野： 数物系科学

科研費の分科・細目： 数学・幾何学

キーワード： 3次元多様体, 4次元多様体, レンズ空間, デーン手術, 枠付き絡み目, カービー計算, 平面曲線

## 1. 研究開始当初の背景

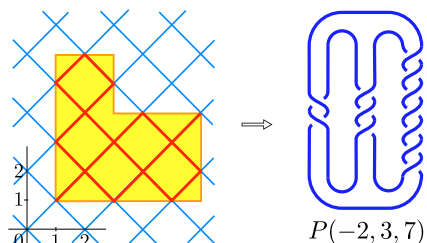
筆者は学生時代から、低次元（つまり3・4次元）のトポロジー、特に手術(surgery)による多様体の変化の研究を続けている。この分野では、結び目(knot)の現象とその多様性が中心的な役割を果たすが、その一部については、代数曲線・特異点論などの現代的な進展と関連付けることで理解が深まると考

えている。

その全体構想の中で、筆者は「例外的手術(exceptional surgery)」に注目する。これは、結び目が双曲的であってもデーン手術によって双曲的でない3次元多様体が生じ得る（いわば奇妙な）現象である。この現象を“+1次元”つまり4次元多様体に関連づけるのが筆者独自の研究である。

研究は2つの局面からなる：1つは例外的手術のしくみの特異点論の視点で考察すること。もう1つは、例外的手術を4次元多様体の構成に関連づけることである。本研究は前者から後者への移行・発展である。

例外的手術の中でも、特にレンズ空間が生じる場合を「レンズ手術」という。既知のレンズ手術は大きく3種に分類される。筆者は2003年頃、既知のレンズ手術の一部(VII型)が、特異点論のもとでN. A' Campo氏によって定義されたdivide knotとして曲線表示できることを示し、ある規則性を発見した(図；出版は2005)。当初はこのことが全てのレンズ手術に拡張できると予想した。種ごとに具体例の考察を進めたところ、この予想は、第1種(最も一般的)については比較的容易と思われたが、より稀少な種については困難が見込まれた。一方、研究分野はHeegaard Floer homologyが登場して数年経ち、レンズ手術への応用が広がる時期にあった。



図：左の平面曲線が右の結び目を表す。右の結び目は双曲的結び目で  $19(18 \text{ も})$ -surgery はレンズ空間になる。黄色のL字型領域の面積が19である。

## 2. 研究の目的

低次元多様体論として発展した「例外的手術」の分野に複素2次元・実4次元多様体論の視点から例外的手術の“しくみ”を解明すること、そして、それを利用して特殊な性質を持つ4次元多様体の構成を試みること、この2つが本研究の研究目的である。

研究期間の前半では、上記1.で述べた規則性のもとにレンズ手術全体を詳細かつ系統的に考察することを目的とした。そこから、レンズ手術に対応する代数：不完全な周期・対称性が例外的に完全なものが生じるしくみに興味をもった。これについて、レンズ空間の分類に用いられる「トーション不変量」をレンズ手術に適用する研究を進めている門上晃久氏と共同研究を行なった。

後半では、レンズ手術の応用としての未知の4次元多様体の構成に焦点をあて、特にエキゾチック対の構成に興味を持った。レンズ空間の4次元多様体への埋め込みの問題が進

展したこと(笹平裕史氏)に刺激を受けた。レンズ手術は「レンズ空間を境界にもつ2次元ベッチ数が1の4次元多様体の構成法」と見なすことができる。そこで、同じレンズ空間を境界にもつ異なる多様体を貼合せたらどんな4次元多様体が得られるのか? という問題について丹下基生氏との共同研究を再開した。

## 3. 研究の方法

数学では、論文や講演による成果報告と研究集会での研究の情報交換が大切である。

(1) 本研究期間中に、海外の国際研究集会に2件、参加した。

① 2009年度「第6回 East Asian School of knots」(天津；中国)で招待講演を務めた。これは日本・韓国・中国と交代で開催している集会で、初期の(日韓の)頃から参加しており、第4回(東大)で現地世話人を務めたことなどから縁と意義を感じている。現在も、そこで知り合った研究者と共同研究に発展しそうな課題がある。

② 2010年度「Singularities, knots, and mapping class groups in memory of Bernard Perron」(Dijon；フランス)に参加し、現地のdivide knot理論の専門家O. Couture氏と討論した。彼は研究室の黒板一面にdivide曲線を描いて筆者を招いてくれた。彼の定義した符号付divideの用法について貴重な情報が得られた。

(2) 2009年度、4次元多様体の同相分類に関するM. Freedmanの原論文を理解する集会「キャッソン・フリードマン理論 研究会」を共同企画し世話人を務めた。フリードマン理論は4次元多様体の最大の興味「エキゾチック性」の核心であるが、手法が“孤立”しており理解するのは難しい。ふだんは面識の少ない一般トポロジーの専門家、講演者 川村一宏氏、松橋英市氏の他、加藤正男先生から、分野を超えて多大な協力をいただきました。若い研究者諸氏の威力に目を見開かされました。このような集会が開けたことに深く感謝しております。

(3) 毎年夏に開かれる恒例のトポロジーシンポジウム(2011年には2つの講演の司会を務めた)、関西と東京で開かれる結び目論と低次元多様体論の研究集会、広島大で開催されている4次元多様体論の研究集会、春に開催される特異点論の研究集会などに参加して最先端の情報を交換した。

(4) ノート型計算機、ソフトウェアなどIT環境を整備して研究の本質的な部分に集中す

ることができた。出張先で、より効果のある情報交換が可能となった。

昨今、純粋数学である幾何の分野でも、結び目や多様体の不変量は複雑で、具体例に対する計算は計算機・プログラムに頼るものが多い。レンズ手術に登場する結び目は概して複雑で計算機が欠かせない。幾何学の論文・講演資料で、ソフトウェアを用いて正確でわかりやすい図を描くことは、読者や聴衆の理解を大いに助ける。

(5) 2011年12月、山口氏の企画で「電通大トポロジーセミナー」として Ryu Hoil 氏 (九州大学) を講演者としたセミナーが開かれたので参加した。今後も学内での研究活動を行いたい。

(6) 筆者の所属大学は2010年(H22年)に大きな改組が行われた。それに関する雑務が増え、初代の共通教育部 教育委員として定期的な会議に代表出席するなどの任務で研究時間が減った。2011年には家族の入院と仏事で研究活動の一部が計画通りに遂行できなかった(例:第7回 East Asian school of knots ; 韓国を欠席)。これらは研究申請時(2008年)には想定し得ない事情であった。単独研究は後まわしにし、共同研究者には仕事の遅さで迷惑をかけたが、逆に励まされ、辛うじて研究を続けることができた。なお、上記の事情は今後続くものではない。

#### 4. 研究成果

(1) 2009年度(1年目 初年度)

① レンズ手術の最も一般的な第1種について、divide 表示に関する論文が学術雑誌 Alg. and Geom. Topology に掲載された。この成果を含む内容を、研究集会「The sixth East Asian School of Knots and Related topics」(天津; 中国) の招待講演で解説した。

Divide knot 理論の創始者である A'Campo 氏の来日で最新情報を取り入れた。

② 4次元多様体の同相分類に関する M. Freedman の原論文を理解する集会「キャッソン・フリードマン理論 研究会」を共同企画し世話人の1人となり、資料 web を作成した。それに派生して、筑波大で4次元多様体の表示法について解説講演の機会をいただいた。

③ 森元勘治氏との共著論文が学術誌に掲載された。Divide knot 論は(正の) twisted torus knot との相性が良い。森元氏はその後もこの研究をさらに押し進めている。広がる研究のきっかけとなれて光栄である。

④ 門上晃久氏と議論を進め共著論文の執筆を開始した。数学会で概要を報告した。

⑤ 研究分担者の研究: 山口氏は無限次元写像空間を、多項式で表現される代数的写像(regular map)の成す有限次元部分空間でホモトピー型がどの程度まで近似できるか研究を進めた。大野氏は多項式環の有限群による不変式環の生成元および生成元間の関係式を求めるアルゴリズムについて研究した。廣瀬氏は種数3以上のハンドル体の写像類群の実係数の1次ホモロジー群が0になることを示し、その帰結として種数が5以上の場合のNielsen 実現不可能性を示した。上記と写像類群との関連は特に興味深い。

(2) 2010年度(2年目)

① フランス Dijon の研究集会

「Singularities, knots, and mapping class groups in memory of Bernard Perron」に参加し、現地の divide knot 理論の専門家 O. Couture 氏と議論した。彼は研究室の黒板一面に divide 曲線を描いて筆者を待ち受けていた。彼の定義した符号付 divide の用法について貴重な情報が得られた。

② 門上氏との共著論文の細部を練り上げた。符号のミスを修正して解決した他、value sequence の概念が定義されて論理が明解になった。この成果は集会「Twisted topological invariants and topology of low-dimensional manifolds」(秋田)で講演し、講究録に記事を執筆した。共著論文とは別の具体例(Berge link)を扱った。

③ 研究集会(広島)での笹平裕史氏の講演に刺激を受けて、丹下基生氏との共著論文の改訂を始めた。同じレンズ空間を生じる異なる結び目の組から構成される4次元多様体についての考察を深めた。

④ 研究分担者の研究: 山口氏は、実代数的多様体の間の写像空間を近似する、多項式で表現される有限次元空間の近似度合いをホモトピー論から研究した。大野氏は、前年の研究を継続しつつ、特に広中分解を求めるアルゴリズムについて研究した。廣瀬氏は、4次元球面内に埋め込まれた向き付け不可能閉曲面の写像類群の研究と関連してレベル2写像類群の生成系について考察し、これがY同相写像によって生成されるという Szepietowski の結果を別の方法で示した。筆者の研究と周辺分野、特に曲面の写像類群との関わりについて大変参考になった。

(3) 2011年度(3年目 最終年度)

① 門上氏との共著論文を慎重に推敲して学術誌に投稿した。

② 丹下氏との共著論文を、執筆再開時よりも充実した内容で完成した。この種の課題に必要な基礎をすべて考察したと自負している。

その成果は広島大学と京都大のセミナーで講演した。共著者達のおかげで、筆者の少し前の結果(未執筆)の意義を見直すことができた。

③ 研究分担者の研究：山口氏は A. Kozłowski 氏 (Warsaw Univ.) との共同研究で、実代数的多様体の中の連続写像全体のなす無限次元写像空間を、実代数的写像のなす有限次元部分空間でホモトピー型がどの程度近似できるか (Atiyah-Jones 型予想) などを研究した。大野氏はマッカイ対応とその関連事項を研究した。また、代数幾何学の中でのトポロジー寄りの成果について貴重な指摘をいただいた。廣瀬氏は、4次元球面内へのある種の標準的な向き付け不可能な閉曲面の埋め込みについて、その Guillou-Marin 2次形式を保つことがその曲面上の写像が4次元球面全体に拡張できるための必要十分条件であることを示した。筆者も修士時代にその2次形式を研究したことがあり、4次元トポロジーの基礎を振り返る良い影響を受けた。

④ 具体的な目標の1つ「レンズ手術の全ての結び目を divide 曲線表示する」の進展について：現時点では、結び目の特徴を反映する良い表示に興味がある。第3種(最も稀少な例)は、結果は得られたが論文の執筆が進んでいない。第2種 VIII 型については、斎藤敏夫氏の指摘により、その形状が最も複雑であることが予想される。この研究は今後も続けたいと考えている。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計8件)

1. S. Hirose, 査読 有  
On diffeomorphisms over nonorientable surfaces standardly embedded in the 4-sphere,  
Algebraic & Geometric Topology 12(2012), 109-130.
2. T. Kadokami and Y. Yamada, 査読 無  
Lens space surgeries along two component links, and Reidemeister-Turaev torsion,

RIMS 合宿型セミナー報告集「Twisted topological invariants and topology of low-dimensional manifolds」(2011), 67-76.

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/1747.html>

3. M. Adamszek, A. Kozłowski and K. Yamaguchi, 査読 有  
Spaces of algebraic maps and continuous maps between real algebraic varieties, Quart. J. Math. 62-4(2011), 771-790.
4. Y. Yamada, 査読 有  
Canonical forms of the knots in the genus one fiber surfaces, Bulletin of the University of Electro-Communications 22-1(2010), 25-31.  
<http://www.lib.uec.ac.jp/limedia/dlam/M404346/4.pdf>
5. A. Kozłowski and K. Yamaguchi, 査読 有  
Spaces of algebraic maps from real projective spaces into complex projective spaces, Contemporary Math. 519(2010), 145-164.
6. S. Hirose, 査読 有  
Realization of the mapping class group of handlebody by diffeomorphisms, Proceedings of the American Math. Soc. 138(2010), 4157-4159.
7. Y. Yamada, 査読 有  
Lens space surgeries as A'Campo's divide knots, Algebraic & Geometric Topology 9 (2009), 397-428.  
DOI: 10.2140/agt.2009.9.397
8. K. Morimoto and Y. Yamada, 査読 有  
A note on essential tori in the exterior of torus knots with twists,  
Kobe J. of Math. 26 1-2(2009), 29-34.

注：日本数学会の講演アブストラクトについては下記を参照。

[学会発表] (計15件)

1. 山田裕一 (丹下基生氏との共同研究),  
4-manifolds constructed by lens space surgery, 上正明氏のセミナー, 京都大学, 2012年1月25-26日.
2. 山口耕平,  
Simplicial resolutions and their related

topics, 城崎ホモトピー論研究集会  
城崎福祉会館, 2011年11月4日.

3. 山田裕一 (丹下基生氏との共同研究),  
レンズ空間手術から構成する4次元多様体,  
広島大学トポロジー・幾何セミナー,  
広島大学, 2011年7月5日.
4. 山口耕平,  
Truncated simplicial resolutions and  
spaces of algebraic maps,  
RIMS 研究集会「変換群の幾何と組み合わせ論」,  
京都大学数理解析研究所,  
2011年6月15日.
5. 山田裕一 (丹下基生氏との共同研究),  
Four dimensional manifolds constructed  
by lens space surgeries  
along torus knots,  
日本数学会年会トポロジー分科会  
(東日本大震災のため中止.  
アブストラクトは有効), 早稲田大学,  
p. 38-39, 2011年3月20日.
6. 山田裕一 (門上晃久氏との共同研究),  
Lens space surgeries along certain  
2-component links, and  
Reidemeister-Turaev torsion,  
RIMS 合宿型セミナー Twisted topological  
invariants and topology of  
low-dimensional manifolds,  
あきた白神体験センター,  
2010年9月16日.
7. Yuichi YAMADA,  
Divide knot presentation of  
Berge's knots of lens space surgery,  
研究集会 Singularities, knots, and  
mapping class groups in memory of  
Bernard Perron, Univ. of Burgundy  
Dijon (FRANCE), 2010年9月7日.
8. 山口耕平,  
Spaces of  $\mathbb{Z}/2$ -equivariant maps between  
some real algebraic varieties,  
RIMS 研究集会「変換群と手術理論」,  
京都大学数理解析研究所,  
2010年8月31日.
9. 山口耕平,  
The homotopy of spaces of algebraic maps  
between real algebraic varieties,  
RIMS 研究集会「空間の代数的・幾何学的  
モデルとその周辺」, 京都大学  
数理解析研究所, 2010年6月29日.
10. 山田裕一 (門上晃久氏との共同研究),

Lens space surgeries along certain  
2-component links and Reidemeister  
-Turaev torsion  
日本数学会年会トポロジー分科会,  
慶応大学理工学部, p. 82-83,  
2010年3月26日.

11. M. Adamaszek, A. Kozłowski  
and K. Yamaguchi,  
The homotopy type of spaces of  
algebraic maps I,  
日本数学会年会トポロジー分科会,  
慶応大学理工学部, p. 52-53,  
2010年3月25日.
12. M. Adamaszek, A. Kozłowski  
and K. Yamaguchi,  
The homotopy type of spaces of  
algebraic maps II,  
日本数学会年会トポロジー分科会  
慶応大学理工学部, p. 54-55,  
2010年3月25日.
13. Yuichi YAMADA,  
Every Berge's knot of lens space  
surgery is a divide knot,  
研究集会「The sixth East Asian School of  
Knots and Related topics」, 南開大学  
Tianjin (CHINA), 2010年1月28日.
14. 山田裕一,  
フリードマン原論文に学ぶ 6章8章,  
キャッソン・フリードマン理論研究会,  
けいはんなプラザ (京都),  
2009年10月19日.
15. 山田裕一,  
4次元多様体を表す Kirby Diagram: 基礎  
から応用, 筑波大学トポロジーセミナー,  
筑波大学, 2009年10月1日.

[図書] ありません.

[その他] ホームページ  
[http://matha.e-one.uec.ac.jp/~yyyamada/  
indexj.html](http://matha.e-one.uec.ac.jp/~yyyamada/indexj.html)

6. 研究組織
- (1) 研究代表者  
山田 裕一 (YAMADA YUICHI)  
電気通信大学・大学院情報理工学研究所・  
准教授  
(H22年度に改組: H21年度は  
電気通信大学・電気通信学部・准教授)  
研究者番号: 30303019

(2)研究分担者

廣瀬 進 (HIROSE SUSUMU)

東京理科大学・理工学部・准教授

(H 2 3 (最終年度) の4月に異動)

(H 2 2年度に改組:

佐賀大学・大学院 工学系研究科・准教授)

(H 2 1 : 佐賀大学・理工学部・准教授)

研究者番号: 1 0 2 6 4 1 4 4

山口 耕平 (YAMAGUCHI KOHHEI)

電気通信大学・大学院情報理工学研究科・  
教授

(H 2 2年度に改組: H 2 1年度は

電気通信大学・電気通信学部・教授)

研究者番号: 0 0 1 7 5 6 5 5

大野 真裕 (OHNO MASAHIRO)

電気通信大学・大学院情報理工学研究科・  
准教授

(H 2 2年度に改組: H 2 1年度は

電気通信大学・電気通信学部・准教授)

研究者番号: 7 0 2 7 7 8 2 0

(3)連携研究者 はありません.