

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年4月25日現在

機関番号：22604

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2009～2011

課題番号：21540090

研究課題名（和文）

結び目の体積予想とその応用

研究課題名（英文）

Volume conjecture of knots and its applications

研究代表者

横田 佳之 (Yokota Yoshiyuki)

首都大学東京・大学院理工学研究科・准教授

研究者番号：40240197

研究成果の概要（和文）：本研究の目的は、三次元球面内の双曲結び目に対する体積予想の完全な証明と、その応用として三次元双曲多様体の変形理論に注目し、双曲構造の変形空間における無限遠点やトーラス・カusp上の最短測地線を求める方法を開発することです。

実際の成果としては、三次元双曲多様体の代表的な幾何学的不変量であるチャーン・サイモンズ不変量を、結び目の補空間に対して、結び目の図式から簡単に計算する方法の開発、5交点結び目に対する体積予想の解決（ジュネーブ大学のカシャエフ氏との共同研究）、6交点結び目に対する体積予想の解決（京都大学の大概氏との共同研究）、トーラス・カuspの形を決定する不変量を、ジョーンズ多項式の積分表示に現れるポテンシャル関数の変形を使って簡単に求める方法の開発です。

研究成果の概要（英文）：The purpose of this research is to prove the volume conjecture for hyperbolic knots in 3-sphere, and to apply the results to find the ideal points of the deformation space of the hyperbolic structures of the knot complement and to find the shortest geodesic on the maximal torus.

The results of this research are to give a simple method to compute the Chern-Simons invariant of hyperbolic knot complements from knot diagrams, the proof of the volume conjecture for 5-crossing knots (joint work with R. Kashaev at University of Geneva), the proof of the volume conjecture for 6-crossing knots (joint work with T. Ohtsuki at Kyoto University), and to give a simple method to compute the cusp shape from the deformation of the potential function appearing in the integral expression of the colored Jones polynomial.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	600,000	180,000	780,000
2010年度	500,000	150,000	650,000
2011年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総計	1,600,000	480,000	2,080,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：結び目、ジョーンズ多項式、体積予想、双曲幾何

1. 研究開始当初の背景

結び目の体積予想は、量子不変量を代表するジョーンズ多項式と、結び目の補空間の幾何構造を結びつける画期的な予想で、ジュネーブ大学のカシャエフ氏、早稲田大学の村上順氏、東京工業大学の村上斉氏によって定式化されました。過去10年間の研究の結果、ジョーンズ多項式の積分表示と、積分表示に現れるポテンシャル関数と結び目補空間の幾何構造の関係、すなわち双曲構造方程式と双曲体積の関係が明らかになりました。

ところが積分値の極限の計算に関しては、本研究を開始した時点では、4交点結び目ひとつしかサポーティング・エビデンスがない状態で、その主な原因は、ジョーンズ多項式の積分表示に、多変数の鞍点法を適用する際の技術的な問題でした。この困難な問題に正面から取り組んだ研究はほとんどなく、体積予想を絡み目や非双曲結び目に一般化することで、ジョーンズ多項式の積分表示や、多変数の鞍点法を使わない証明が期待されていました。

また、ジョーンズ多項式の積分表示に現れるポテンシャル関数に関しては、本研究を開始した時点で、双曲構造方程式と双曲体積だけでなく、結び目補空間のチャーン・サイモンズ不変量など、幾何的に重要な不変量の情報が含まれていると予想されていましたが、証明の方針が見えない状況でした。その主な原因は、チャーン・サイモンズ不変量などの不変量を、四面体分割の局所的な情報だけを積み上げて計算する方法の欠如にあり、コロンビア大学のノイマン氏による方法の改良が期待されていました。

2. 研究の目的

本研究の目的は、結び目のジョーンズ多項式の積分表示に、多変数の鞍点法を適用する際の技術的な問題を解決し、三次元球面内の双曲結び目に対する体積予想の証明を完成させることと、ジョーンズ多項式の積分表示に現れるポテンシャル関数と結び目補空間の幾何的な不変量との関係を解析し、結び目理論への応用を図ることです。

前者に関しては、オリジナル・バージョンの体積予想を解決することで、一般化されたさまざまなバージョンの体積予想の研究、ひいては結び目理論への応用に拍車がかかると期待しています。また、いつまでも体積予想のサポーティング・エビデンスが貧弱な状態では、後継者が育たず、量子不変量と多様

体の幾何構造をつなぐチャンスが、失われてしまいかねません。

後者に関しては、ポテンシャル関数とチャーン・サイモンズ不変量やライデマイスター・トーションなどの重要な幾何的不変量との関係を、結び目補空間の基本群の表現の観点からとらえ直すことと、結び目補空間の基本群の表現空間における無限遠点や、トーラス・カスプ上の最短測地線を求める方法を開発し、結び目の手術理論への応用を図ることが主な目的です。

3. 研究の方法

ジョーンズ多項式の積分表示に、多変数の鞍点法を適用する際の技術的な問題に関しては、まず6交点までの結び目に対して、ジョーンズ多項式の積分表示におけるデフォルトの積分路を、主要部と非主要部に分割することが出発点となりました。主要部では、積分路の変形を具体的に書き下すことで、多変数の鞍点法が適用できること、また主要部は、結び目の図式の組み合わせ的な情報から決まることを確認し、非主要部の積分値は、被積分関数の絶対値を評価する方針で、ジュネーブ大学のカシャエフ氏、京都大学の大槻氏との共同研究を進めました。本研究の最終年度には、ツイスト結び目と呼ばれる結び目の無限族に対しても、主要部を抽出することに成功し、その解析を進めました。非主要部に関しても、京都大学の太田氏の協力を仰いで、実験を進めました。

ジョーンズ多項式の積分表示に現れるポテンシャル関数とチャーン・サイモンズ不変量との関係については、カリフォルニア大学のジッカート氏によって確立された、四面体分割の局所的な情報からチャーン・サイモンズ不変量を計算する最新の方法を、体積予想の研究で利用してきた結び目補空間の四面体分割に適用することを試みました。この過程では、他の幾何的不変量との関係にもらみ、ポテンシャル関数の変数自体の幾何的な意味も同時に解析しました。また、結び目補空間の四面体分割から誘導されるトーラス・カスプの三角形分割を細かく解析し、トーラス・カスプ上の緯線の情報を、ポテンシャル関数を用いて表す方法を模索すると同時に、トーラス・カスプに直交する最短測地線を、各四面体の厚みを使って解析することを試みました。さらに、結び目のA-多項式の研究にも用いた、ポテンシャル関数の変形を利用して、トーラス・カスプの形、いわゆるカスプ・シェイプの解析を試みました。

4. 研究成果

ジョーンズ多項式の積分表示に、多変数の鞍点法を適用する際の技術的な問題に関しては、ジュネーブ大学のカシャエフ氏、京都大学の大槻氏との共同研究が順調に進み、6交点までの結び目に対して、ジョーンズ多項式の積分表示における主要部への鞍点法の適用と、非主要部の積分値を絶対値で評価する作業が終了しました。これにより、6交点までの結び目に対して、体積予想の証明が完成し、結び目の体積予想のサポーティング・エビデンスが大幅に拡大されました。一方でツイスト結び目に関しては、非主要部の被積分関数の絶対値による評価が功を奏さず、新しい技術的な問題を発見しました。これは、ジョーンズ多項式の積分表示に、ポアソン和公式を使ったことにより生じる問題と考えられ、一般の結び目に対する体積予想の証明に向けて、クリアすべき問題点がより明確に見えてきたことは大きな収穫だと考えています。

ジョーンズ多項式の積分表示に現れるポテンシャル関数とチャーン・サイモンズ不変量の関係については、カリフォルニア大学のジッカート氏によるチャーン・サイモンズ不変量の計算方法が、体積予想の研究で利用してきた結び目補空間の四面体分割と非常に相性がよく、結び目補空間の双曲構造に対応するポテンシャル関数の臨界値が、結び目補空間の双曲体積とチャーン・サイモンズ不変量にぴたりと一致する事実が確かめられました。同時に、ポテンシャル関数の変数が、トーラス・カスプに直交する結び目補空間の測地線の長さ・ひねりに対応していることもわかり、ポテンシャル関数とライデマイスター・トーシヨンの関係など、今後の応用に期待が持てます。実際、京都大学の大槻氏との共同研究の結果は、ポテンシャル関数のヘッセ行列式がライデマイスター・トーシヨンと関係していることを示唆しており、ポテンシャル関数の変数に関する本研究の成果を、今後活かしていく所存です。

また、結び目補空間の四面体分割から誘導されるトーラス・カスプの三角形分割から、トーラス・カスプ上の緯線の情報を解析してきましたが、結び目のA-多項式の研究に用いたポテンシャル関数を変形したものを使うと、緯線の情報およびカスプ・シェイプを簡単に導けることがわかりました。トーラス・カスプに直交する最短測地線の研究の進展と合わせて、結び目のデーン手術理論への応用などが、いよいよ現実のものになってきました。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計2件)

① Mayuko Yamazaki and Yoshiyuki Yokota, On the limit of the colored Jones polynomial of a non-simple link, Tokyo Journal of Mathematics 33(2010), 537-551

② Yoshiyuki Yokota, On the complex volume of hyperbolic knots, Journal of Knot Theory and its Ramifications 20(2011), 955-976

[学会発表] (計7件)

① Yoshiyuki Yokota, On the complex volume of hyperbolic knots, Volume conjecture, invariants and geometry of knots, Waseda University, January, 2010

② Yoshiyuki Yokota, On the complex volume of hyperbolic knots, Low dimensional topology and number theory II, University of Tokyo, March, 2010

③ 横田佳之, On ideal triangulations of hyperbolic knot complements, Lefschetz fibration and category theory, 大阪大学, 2010年6月

④ Yoshiyuki Yokota, On the complex volume of hyperbolic knots, Low dimensional topology and number theory, Mathematische Forschungsinstitute Oberwolfach, August, 2010

⑤ Yoshiyuki Yokota, On the complex volume of hyperbolic knots, Branched Coverings, Degenerations, and Related Topics 2011, Tokyo Metropolitan University, March, 2011

⑥ Yoshiyuki Yokota, On the Kashaev invariant of twist knots, Intelligence of Low-dimensional Topology, Kyoto University, May, 2011

⑦ 横田佳之, 結び目のジョーンズ多項式の不思議, 結び目理論の展望, 早稲田大学, 2012年3月

[図書] (計0件)

[産業財産権]

○出願状況 (計0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.comp.tmu.ac.jp/~jojo>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

横田 佳之 (YOKOTA YOSHIYUKI)

首都大学東京・大学院理工学研究科・准教授

研究者番号：40240197

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：