

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年4月28日現在

機関番号：34419

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2011

課題番号：21540101

研究課題名（和文） 特異点の二次障害類に関する研究

研究課題名（英文） Study on the secondary obstruction classes of singularities

研究代表者

佐久間 一浩 (SAKUMA KAZUHIRO)

近畿大学・理工学部・教授

研究者番号：80270362

研究成果の概要（和文）：微分可能多様体間の滑らかな生成的写像に現れる特異点の Thom 多項式以外の障害として、二次コホモロジー類が定義される。4次元多様体間の生成的写像に対して、定義域4次元多様体の4次の Stiefel-Whitney 類が尖点を消去するための二次障害類であることを証明した。

研究成果の概要（英文）：The secondary cohomology class of singularity for a generic smooth map between differentiable manifolds can be defined as an obstruction class other than the Thom polynomials of singularities. For a generic smooth map between 4-manifolds we have proved that the 4-th Stiefel-Whitney class of the source 4-manifold would be the secondary obstruction class for eliminating cusp singularities of the smooth map.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	900,000	270,000	1,170,000
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
2011年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総計	2,500,000	750,000	3,250,000

研究分野：数物形科学

科研費の分科・細目：数学、幾何学、微分トポロジー

キーワード：多様体、微分可能写像、特異点

1. 研究開始当初の背景

1950年代に H. Whitney と R. Thom により、微分可能写像の特異点論が創始された。特に、1955年に発表された Thom の論文では、特異点の Thom 多項式が定義され、1080年代になって安藤良文により、Thom 多項式がジェット束の部分束の切断の第一次障害類として解釈されることが判明した。したがって、Thom 多項式が消えている場合に自然に第二次障害類を考えることができるが、具体的な微分可能写像に対して、第二次障害類を決定した例は見つかっていなかった。19

70年代には、エリアシュベルグにより、はめ込み写像のスメール-ハーシュのホモトピー原理の類似として、折り目特異点のみを持つ微分可能写像に関するホモトピー原理が1次ジェットのレベルで証明された。さらに安藤により2002年には2次ジェットのレベルへと精密化された。このような状況で、尖点の Thom 多項式が消えている場合に、第二次障害類を決定する例を見いだすことが問題として明確になり始めていた。

2. 研究の目的

微分可能多様体間の滑らかな安定写像あるいは生成的写像に現れる特異点型を固定したときに、2001年にThom多項式の計算がR.Rimanyiによってなされた。そこで自然に生じる問題として、その型の特異点のThom多項式が消えている場合に、第二次の障害類を見いだすことが重要となる。古典的には、前項でも触れたはめ込み写像のスメールーハーシュのホモトピー原理の応用として、特異点の第二次障害類を決定できる場合がある。それは定義域多様体を向きづけられた4次元閉多様体から6次元ユークリッドへのはめ込み写像の存在のための必要十分条件がハーシュにより、求められていて、その条件は第二次Stiefel-Whitney類と第一次Pontrjagin類によって記述され、これは4次元多様体の位相不変量によって表される。この事実に基づいて、4次元多様体から6次元ユークリッド空間への安定写像を考えると、このような微分可能写像は、Matherの構造安定性問題の解として、写像空間においてWhitney位相のもと開かつ稠密に存在するため、安定写像を調べることに意味がある。この安定写像には一般にはWhitney傘特異点が現れるが、そのThom多項式は消えていることが分かる。したがって、第二次障害類が問題となるが、4次元多様体論によりオイラー標数の偶奇で判定され、これが第二次障害類とよぶべきものである。このように、一般に値域多様体の次元の方が大きいときには、はめ込み写像という特異点が現れない微分可能写像に多様体論を適用することに第二次障害類を論ずることがかのであるが、定義域多様体の次元が値域多様体の次元より大きい等しい場合には、そのような例は見つかっていないため、このような次元対で第二次障害類を見いだすことが本研究の目的となる。

### 3. 研究の方法

すでに述べたように安藤による折り目特異点のみをもつ微分可能写像に対する二次ジェットに精密化されたホモトピー原理は、第二次障害類を具体的に計算するための基本となる。これは言い換えると、多様体の安定スパンの問題とほぼ同値になる。ただし、完全に同値ではない。つまり、 $(n, p)$ 次元対に対して、 $n-p$ が偶数ならば同値であるが、奇数の場合は十分条件を与えるに過ぎないことが分かる。奇数の場合は、特異点集合への制限写像は余次元1のはめ込みになるが、そのはめ込みの法束が自明となるときにもとの微分可能写像を平凡折り目写像とよぶことにする。すると平凡折り目写像の存在の問題と安定スパンの問題が同値となる。第二次障害類を論ずる場合には定義域多様体の次元が4以上でなければならないことも分か

る。そこで、安定スパンの問題として解ける最も簡単な場合が $(n, p)=(4, 4)$ の場合であり、このときには障害理論とポストニコフ・タワーによる計算を行い第二次障害類を計算するという方法が考えられる。第二次障害類を計算するというのは、ホモトピー論的にも一般に難しい問題であるが、それゆえ特異点の第二次障害類を決定する意義も深いといえる。

### 4. 研究成果

4次元閉多様体から4次元ユークリッド空間への折り目特異点のみをもつ微分可能写像が存在するための必要十分条件は、4次元多様体が向き付け可能ならば、第二次Stiefel-Whitney類と第一次Pontrjagin類が消えることであり、4次元多様体が向き付け不可能ならば、第二次Stiefel-Whitney類と第4次Stiefel-Whitney類が消えることである。この向き付け不可能な場合の結果は、第4次Stiefel-Whitney類が尖点を消去するための第二次障害類となっている意味する。さらにこの結果は従来の未解決問題の部分解が得られた。向きづけられた4次元閉多様体から3次元ユークリッド空間への折り目特異点のみをもつ微分可能写像が存在するための必要十分条件は、2003年に佐伯修により、2004年にSadykovにより独立に求められたが4次元閉多様体が向き付け不可能な場合は未解決であった。ここで延べた安定スパンの問題の解から、4次元閉多様体のオイラー標数が偶数ならば存在することがわかった。向き付けられた4の倍数次元の閉多様体で次元が12次元以上であるとき、4次元ユークリッド空間への折り目特異点のみをもつ微分可能写像が存在するための必要十分条件は、次元を $4k$ とするとき、 $4k-2$ 次のStiefel-Whitney類が消えて、さらに多様体の符号数が8の倍数であることと求まった。

### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計1件)

- ① R.Sadykov, O.Saeki and K.Sakuma, Obstructions to the existence of fold maps, *J. London Math. Soc.* (2) vol. 81 (2010), 338-354. (査読有り)

[学会発表] (計3件)

- ① 佐久間一浩, Thom多項式以外の障害、日本数学会年会、早稲田大学理工学部、平成23年3月25日。
- ② 佐久間一浩, Topology of fold maps、広島大学トポロジーセミナー、平成22年

- 10月22日。  
③ 佐久間一浩、折り目写像のトポロジーについて、平成22年7月16日、写像の特異点論研究集会、日本大学文理学部

(3)連携研究者  
なし

〔図書〕(計5件)

- ① 佐久間一浩、数8の神秘—アーク不変量に秘められた8の神秘、「数学セミナー」2012年3月号(日本評論社)。
- ② 佐久間一浩、数8の神秘—対称双一次形式に秘められた8の神秘、「数学セミナー」2012年2月号(日本評論社)。
- ③ 佐久間一浩、数8の神秘—代数に秘められた8の神秘、「数学セミナー」2012年1月号(日本評論社)。
- ④ 佐久間一浩、数8の神秘—球面に秘められた8の神秘、「数学セミナー」2011年12月号(日本評論社)。
- ⑤ 佐久間一浩、数8の神秘—多元体に秘められた8の神秘、「数学セミナー」2011年11月号(日本評論社)。

〔産業財産権〕

○出願状況(計0件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

○取得状況(計0件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

佐久間 一浩 (SAKUMA KAZUHIRO)  
近畿大学・理工学部・教授  
研究者番号：80270362

### (2) 研究分担者

なし