

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 6 月 25 日現在

機関番号：56203

研究種目：基盤研究 C

研究期間：H21～H23

課題番号：21540104

研究課題名（和文） 旗多様体上のシューベルトカルキュラスとその応用

研究課題名（英文） Schubert calculus on flag varieties and its application

研究代表者 中川 征樹
(NAKAGAWA MASAKI)

研究者番号：50370036

研究成果の概要（和文）：

- (1) E_8 を階数 8 の例外型コンパクト単連結単純 Lie 群, T をその極大トーラスとすると, 旗多様体 E_8/T の整数係数コホモロジー環を決定した. さらに, 差分商作用素を用いて, この環を生成する Schubert 類を特定した. この結果を用いて, 対応する複素代数群 E_8 の Chow 環を決定することができた.
- (2) 局所化の手法および等質空間のトーラス同変コホモロジー環の GKM 表示を利用して, 旗多様体 G_2/B (G_2 は G_2 型の複素 Lie 群, B はその Borel 部分群) および複素 2 次超曲面 Q_n のトーラス同変コホモロジー環を具体的に計算した.
- (3) 河野・小島の結果を拡張して, 無限シンプレクティック群 Sp および無限直交群 SO の基点付きループ空間のなす Pontrjagin 環が, それぞれ Schur P -関数, Q -関数のなす環と同型であることを示した.

研究成果の概要（英文）：

- (1) We determined the ring structure of the integral cohomology ring of the flag manifold E_8/T , where E_8 denotes the compact simply-connected simple exceptional Lie group of rank 8 and T its maximal torus. We also identified the Schubert classes which generate this ring by means of the divided difference operators. Using this result, we were able to determine the Chow ring of the corresponding complex algebraic group E_8 .
- (2) Using the localization technique and the GKM description of the torus equivariant cohomology rings of homogeneous spaces, we computed the torus equivariant cohomology ring of the flag variety G_2/B and the complex quadric Q_n explicitly, where G_2 denotes the complex Lie group of type G_2 and B a Borel subgroup.
- (3) Extending the result due to Kono-Kozima, we showed that the Pontrjagin ring of the based loop space of the infinite symplectic group Sp (resp. infinite orthogonal group SO) is isomorphic to the ring of Schur P - (resp. Q) functions

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009 年度	900,000	270,000	1,170,000
2010 年度	800,000	240,000	1,040,000
2011 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総計	2,500,000	750,000	3,250,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：Lie 群, 旗多様体, コホモロジー, Chow 環, ループ空間, アフィン Grassmann 多様体, Hopf 代数

1. 研究開始当初の背景

コンパクトな連結 Lie 群 K をその極大トーラス T で割って得られる完全旗多様体 K/T は, トポロジーのみならず, 表現論や代数幾何など現代数学において最も重要な等質空間の一つである. トポロジーにおいては, そのコホモロジー環の研究が Borel, Cartan 等により始められ, K の Weyl 群の「余不変式環」としての表示が知られている. 一方で, K の複素化である複素 Lie 群を G , T を含む Borel 部分群を B とするとき, 微分同相 $K/T \cong G/B$ が成り立ち, G の Bruhat 分解から, G/B はいわゆる Schubert 胞体に分割され, 各 Schubert 胞体の閉包として得られる Schubert 多様体の定めるコホモロジー類(=Schubert 類)が $K/T \cong G/B$ の整数係数コホモロジー環の自由基底になることが知られている(Schubert 基底). このように, 旗多様体 $K/T \cong G/B$ のコホモロジー環は, Weyl 群の余不変式環という代数的な表示(Borel 表示)と Schubert 類を利用した幾何的な表示(Schubert 表示)をもつ. 両者の関係を追究する過程で, 1982 年に Lascoux と Schutzenberger により, Schubert 多項式が発見された. これにより, 旗多様体のコホモロジー環の環構造を組合せ論的に記述する公式(Pieri の公式, Giambelli の公式など)の研究や Schubert 多項式の組合せ論的研究などがなされ, トポロジー, 代数幾何, 表現論, 組合せ論を巻き込んだ活発な研究が行われている. 研究開始当初(2009 年)においては, 完全旗多様体のコホモロジー環の場合を雛形として, 複素 Grassmann 多様体や Lagrangian Grassmann 多様体を含むより一般の旗多様体 G/P (P は放物型部分群)のコホモロジー環や極大トーラスの作用を考えたトーラス同変コホモロジー環, さらに K -理論や量子コホモロジー環などへの拡張が試みられていた.

2. 研究の目的

A 型の完全旗多様体 $Fl(n) \cong GL(n, C)/B \cong U(n)/T$ (B は上三角行列全体のなす $GL(n, C)$ の Borel 部分群, T は対角行列からなる $U(n)$ の極大トーラス)の整数係数コホモロジー環の Borel 表示は, n 変

数の多項式環を, 変数たちの基本対称式で生成されるイデアルで割った剰余環で与えられる. この剰余環の中で, 各 Schubert 類を表す多項式として Schubert 多項式が導入された. この多項式の族は, 係数がすべて正である(正値性)など, 組合せ論的にも非常に良い性質を持っており, コホモロジー環の積構造を多項式のレベルで記述できるという効用がある. この研究を核として, 複素 Grassmann 多様体や Lagrangian Grassmann 多様体など主として古典型の一般旗多様体のコホモロジー環や極大トーラスの作用を考えたトーラス同変コホモロジー環, さらに K -理論への拡張が試みられ, Schur 関数, Schur の P, Q -関数, 二重 Schubert 多項式, Grothendieck 多項式など様々な多項式の族が導入され, 幾何と代数との融合が試みられてきた. 一方で, 例外型の Lie 群の旗多様体に関しては, 報告者の研究を含め, 近年ようやくそのコホモロジー環の環構造が決定されつつあり, 例外型の Schubert 多項式等の研究が開始できる下地ができあがりつつある. そこで, 本研究では, 例外型の Schubert 多項式の追究や上述の研究では扱われていない「等方的 Grassmann 多様体」のトーラス同変コホモロジー環や K -理論の記述を試みることを目的とする.

3. 研究の方法

- (1) 完全旗多様体 K/T のコホモロジー環の Borel 表示は, K の Weyl 群の余不変式環という代数的な表示であり, その環としての生成元に幾何的な意味合いはない. 一方で, K/T のコホモロジー環は Schubert 基底という幾何的に定義された加法基底を持っている. 両者の関係を明らかにするため, Bernstein-Gelfand-Gelfand および Demazure により導入された差分商作用素を利用する. これにより, K/T のコホモロジー環の Schubert 類を用いた環表示が得られ, その副産物として, K の複素化 G の Chow 環を, Grothendieck, Marlin の方法により計算する.
- (2) G を連結な複素半単純 Lie 群, B, T をそれぞれ Borel 部分群, 極大トーラスとす

る. P を B を含む放物型部分群とすると、旗多様体 G/P には T が左から作用し、そのトーラス同変コホモロジー環を考えることができる. いわゆる **GKM** 理論によると、このトーラス同変コホモロジー環は、 T の作用による固定点集合から誘導される「局所化写像」を通じて、組合せ論的に記述できることが知られている. この方法を様々な旗多様体に適用して、そのトーラス同変コホモロジー環を記述する.

4. 研究成果

- (1) コンパクトな単連結単純 Lie 群のうち、その完全旗多様体の整数係数コホモロジー環が決定されていないものは E_8 のみであった. 報告者は、 E_8 の Weyl 群の余不変式環の計算および Borel, Toda の方法を利用して、その整数係数コホモロジー環を決定した. さらには、差分商作用素を利用することにより、コホモロジー環を生成する Schubert 類を特定し、その結果を利用して、 E_8 の Chow 環も決定することができた.
- (2) G を複素数体 C 上の単連結な半単純 Lie 群、 B, T をそれぞれ Borel 部分群、極大トーラス、 P を B を含む放物型部分群とすると、一般旗多様体 G/P への T の作用による同変コホモロジー環は、 T の作用による固定点集合への「局所化写像」を通して、組合せ論的に記述できることが知られている (GKM 表示). 完全旗多様体 G/B や複素 Grassmann 多様体を含む古典型的一般旗多様体の場合には、二重 Schubert 多項式を用いた美しい表示が知られているが、例外型や一般の「等方的 Grassmann 多様体」の場合はまだ十分に研究されているとは言い難い. そこで、階数が最も低い例外群 G_2 および複素 2 次超局面 Q_n の場合に、局所化写像を利用して、旗多様体 G_2/B および Q_n の T -同変コホモロジー環の環構造を具体的に計算した.
- (3) G を複素数体 C 上の連結かつ単連結な半単純 Lie 群、 K をその極大コンパクト部分群とすると、 G のアフィン Grassmann 多様体 Gr_G は K 上の基点付きループ空間 ΩK とホモトピー同値であることが知られており、したがって、トポロジーの手法を利用して、 $Gr_G = \Omega K$ のホモロジー群や K -群を調べることができる. $G = SL(n, C)$, $K = SU(n)$ の場合には、「 k -Schur 関数」を用いた記述が知られており、これは $n \rightarrow \infty$ の極限において、 $\Omega SU(\infty)$ のホモロジー環と整数環 Z 上の対称関数環 Λ との Hopf 代数としての同型を与える. この考えを $(G, K) = (Sp(2n, C), Sp(n))$ および $(SO(n, C), SO(n))$ の場合に推し進め、河

野-小島による記述を発展させることにより、 $\Omega Sp(\infty)$ および $\Omega_0 SO(\infty)$ のホモロジー環が Schur P および Q 関数のなす環と Hopf 代数として同型であることを示した.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 2 件)

Masaki Nakagawa, The integral cohomology ring of E_8/T , Proceedings of the Japan Academy Ser. A Mathematical Sciences, 査読有, 第86巻 第3号, 2010, pp. 64-68.
DOI:10.3792/pjaa.86.64

中川 征樹, シューベルト・カルキュラス (特集 図形から学ぶリー代数), 査読無, 数学セミナー (日本評論社) 2009年10月号 pp. 34-39.
http://www.nippon.co.jp/blog_susemi/archives/75.html

[学会発表] (計 3 件)

中川 征樹, ループ空間のホモロジーについて, 芝浦工業大学数理科学科第 22 回談話会, 2012 年 1 月 30 日 (芝浦工業大学).

中川 征樹, Schur P -関数とシンプレクティック群上のループ空間について, 2011 年度日本数学会年會, 2011 年 3 月 21 日 (早稲田大学).

Masaki Nakagawa, On the signature of Grassmannians via Schubert calculus, Bratislava Topology Symposium, 2009年9月10日 (Comenius 大学).

[図書] (計 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

○取得状況 (計◇件)

名称:
発明者:

権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

中川 征樹 (NAKAGAWA MASAKI)
香川高等専門学校・准教授
研究者番号：50370036

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

三村 護 (MIMURA MAMORU)
岡山大学名誉教授
研究者番号：70026772

成瀬 弘 (NARUSE HIROSHI)
岡山大学教育学部・教授
研究者番号：20172596

池田 岳 (IKEDA TAKESHI)
岡山理科大学理学部・准教授
研究者番号：40309539

西本 哲 (NISHIMOTO TETSU)
近畿医療福祉大学社会福祉学部・准教授
研究者番号：80330520

鍛冶 静雄 (KAJI SHIZUO)
山口大学理学部・講師
研究者番号：00509656