

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年5月11日現在

機関番号：12301

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2011

課題番号：21540110

研究課題名（和文） 超伝導におけるギャップ関数を温度と波数ベクトルの両方の関数として扱う数学的研究

研究課題名（英文） Mathematical analysis of the gap function in the BCS model of superconductivity as a function of both the temperature and the wavevector

## 研究代表者

渡辺 秀司 (WATANABE SHUJI)

群馬大学・大学院工学研究科・教授

研究者番号：90222405

## 研究成果の概要（和文）：

超伝導現象の量子力学的理論として確立した BCS 理論における BCS ギャップ方程式の解について、まずはポテンシャルが定数の時において陰関数定理に基づき、解の存在と一意性、解の温度に関する滑らかさ等を示した。次にポテンシャルが定数でない時において、Schauder の不動点定理を応用して解の温度依存性を明らかにした。続いて、温度についても 2 回連続微分可能な関数によって解を近似することで、ポテンシャルが定数ではない時に超伝導への相転移が 2 次相転移であることを数学的に証明した。

## 研究成果の概要（英文）：

We study the solution to the BCS gap equation in the BCS model of superconductivity. When the potential is a positive constant, we establish the existence and uniqueness of the solution so as to show smoothness of the solution on the basis of the implicit function theorem. When the potential is not a constant, we next show how the solution varies with the temperature on the basis of the Schauder fix-point theorem. Approximating the solution by a function of class  $C^2$ , we then show that the phase transition to a superconducting state is a second-order phase transition.

## 交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	600,000	180,000	780,000
2010年度	500,000	150,000	650,000
2011年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総計	1,600,000	480,000	2,080,000

研究分野： 応用数学

科研費の分科・細目： 数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード： 不動点定理、陰関数定理、BCS ギャップ方程式、超伝導、温度、2次相転移、熱力学的ポテンシャル

## 1. 研究開始当初の背景

(1) 超伝導研究の始まりは、1911年に Onnes が絶対温度 4.2 K で水銀の電気抵抗がゼロになるという画期的な現象を発見したことに遡る。これは、ひとたび電流が流れれば永久的に流れ続ける、という驚異的な現象である。この発見により、Onnes はノーベル物理学賞を受賞した。その後今日に至るまで、様々な超伝導現象が発見され続けている。このような超伝導現象に関する量子力学的理論は、1957年に Bardeen, Cooper, Schrieffer の3人によって初めて確立され、今日では BCS 理論とよばれ、大きな成功を収めている。この BCS 理論に対しても、やはりノーベル物理学賞が授与された。

(2) 超伝導状態になると、多くの金属や合金のエネルギースペクトルには、エネルギーの跳び（ギャップ）が観測される。これは、温度と電子の波数ベクトルの両方の関数なので、ギャップ関数と呼ばれている。BCS 理論においては、ギャップ関数は BCS ギャップ方程式と呼ばれる非線形積分方程式の解である。したがって、もし、BCS ギャップ方程式には解が存在しないということが、数学的に証明されたら、BCS 理論の仮定が成り立たなくなる。それゆえ、ノーベル物理学賞が授与された BCS 理論が土台から崩れて、混迷した大変な事態が生じてしまう。そのため、BCS ギャップ方程式には解が一意的に存在することを数学的に証明して、解の性質を数学的に解明することは、BCS 理論に数学的な裏づけを与えることになるので、極めて重要である。そして、超伝導の物理学や工学への大きな波及効果が期待できる。

(3) この方面での数学サイドからの先行研究として、ヨーロッパやアメリカの研究者により、BCS ギャップ方程式の解の存在と一意性が数学的に証明されている。しかし、ギャップ関数は温度と波数ベクトルの両方の関数であるにもかかわらず、数学サイドからの先行研究では、それは波数ベクトルのみの関数として見做されていた。そのため、波数ベクトルのみの関数から成る Banach 空間が設定されただけで、解の温度についての連続性や微分可能性などの性質はその数学的な困難さ故に全く調べられていなかった。超伝導の物理学や工学では、ギャップ関数は、あくまでも温度と波数ベクトルの両方の関数として扱われなければならないので、数学サイドからの先行研究は全く不十分であった。

## 2. 研究の目的

(1) 超伝導の量子力学的理論として知られている BCS 理論における BCS ギャップ方程式の解の温度に対する依存性を不動点定理などを用いて作用素論的に明らかにする。さらに、解の温度についての連続性を、もし可能であれば温度についての微分可能性をも示す。

(2) 次に、温度についても2回連続微分可能な関数によって解を近似することにより、通常の伝導状態から超伝導状態への相転移が2次相転移であることを熱力学的ポテンシャルを扱って数学的に証明する。

## 3. 研究の方法

(1) BCS ギャップ方程式におけるポテンシャルがまずは正の定数である場合を扱う。この場合は、BCS ギャップ方程式はシンプルな方程式になる。しかし、よく知られた形での陰関数定理は適用できないので、新たな形での陰関数定理を証明してそれを適用する。これにより、シンプルな BCS ギャップ方程式の解の存在・一意性、温度についての2回連続微分可能性などを示す。

(2) BCS ギャップ方程式におけるポテンシャルが正の定数となる場合は、BCS ギャップ方程式はシンプルな方程式に、上述のようになるが、この解を熱力学的ポテンシャルの表式に登場しているギャップ関数と見做せるので、ギャップ関数にこの解を代入する。こうすることにより、熱力学的ポテンシャルの温度に対する滑らかさが知れる。熱力学的ポテンシャルが温度について2回連続微分可能であり、さらに転移温度では温度についての2階の偏導関数が不連続であることを示して、通常の伝導状態から超伝導状態への相転移が2次相転移であることを数学的に証明する。

(3) 陰関数定理の応用による以上の成果に立脚して、BCS ギャップ方程式におけるポテンシャルが定数ではなくて、エネルギーの関数になっている、いっそう困難な場合を次に扱う。温度を任意に固定して、波数ベクトルのみから成る Banach 空間のある部分集合  $V$  に着目する。ただし、 $V$  として温度とともにどのように変化するかを把握できるようなものを選ぶことが重要である。BCS ギャップ方程式の解をこの方程式が定める非線形積分作用素の不動点として捉え、この非線形積分作用素が集合  $V$  からそれ自身へのコン

パクト写像であることを証明する。そして Schauder の不動点定理を適用することにより、BCS ギャップ方程式の解が温度とともにどのように変化するかを判明する。

(4) 次に、温度についても2回連続微分可能な関数によって、BCS ギャップ方程式の解を近似して、熱力学的ポテンシャルの表式に登場しているギャップ関数にこの近似解を代入する。このようにすれば、熱力学的ポテンシャルの温度に対する滑らかさが知れる。熱力学的ポテンシャルが温度について2回連続微分可能であり、さらに転移温度では温度についての2階の偏導関数が不連続であることを示して、通常の伝導状態から超伝導状態への相転移が2次相転移であることを数学的に証明する。

#### 4. 研究成果

(1) BCS ギャップ方程式におけるポテンシャルが正の定数である場合は、上述のようにBCS ギャップ方程式はシンプルな方程式になる。温度とエネルギーを表す平面上にある種の領域を設定して、新たな形での陰関数定理を証明した。この適用により、シンプルなBCS ギャップ方程式の解の存在・一意性を証明した。またシンプルなBCS ギャップ方程式の定める2変数関数の滑らかさを検討することによって、温度について2回連続微分可能であることなどを示した。さらに、絶対零度や転移温度における、解の温度についての1階の偏微分係数の値が、超伝導の物理学や工学において予想されていた値と正に一致することを示した。

(2) BCS ギャップ方程式におけるポテンシャルが正の定数の場合において、上で得られた解を熱力学的ポテンシャルの表式に登場しているギャップ関数に代入して、熱力学的ポテンシャルの温度に対する滑らかさを調べた。この結果、熱力学的ポテンシャルが温度について転移温度以外の温度では2回連続微分可能であり、さらに転移温度では温度についての2階の偏導関数が不連続であることが示された。したがって、通常の伝導状態から超伝導状態への相転移が2次相転移であることを数学的に証明できた。さらに、転移温度における定積比熱の跳びを表現する正確な表式も導出できた。この正確な表式は、超伝導の物理学や工学において全く予想されていなかったものである。

(3) 陰関数定理の応用による以上の成果に立脚して、BCS ギャップ方程式におけるポテンシャルが定数ではなくて、エネルギーの関

数になっている、いっそう困難な場合を次に扱った。温度を任意に固定して、波数ベクトルのみから成る Banach 空間のある部分集合  $V$  について以下の性質が満たされることを示した。この部分集合が有界かつ閉かつ凸であることを示し、また、温度とともにどのように変化するかを完全に把握した。続いて BCS ギャップ方程式の解をこの方程式が定める非線形積分作用素の不動点として捉えて、この非線形積分作用素が集合  $V$  からそれ自身へのコンパクト写像であることを証明した。そして Schauder の不動点定理を適用することにより、BCS ギャップ方程式の解が温度とともにどのように変化するかを明らかにした。さらに解の一意性に対する別証明をも与えた。

(4) 上述の成果に基づいて、次に、温度についても2回連続微分可能な関数によって、BCS ギャップ方程式の解を近似した。熱力学的ポテンシャルの表式に登場しているギャップ関数にこの近似解を代入して、熱力学的ポテンシャルの温度に対する滑らかさを調べた。この結果、熱力学的ポテンシャルが転移温度以外の温度では温度について2回連続微分可能であり、さらに転移温度では温度についての2階の偏導関数が不連続であることが判明した。このようにして、BCS ギャップ方程式におけるポテンシャルが定数ではなくて、エネルギーの関数になっている場合でも通常の伝導状態から超伝導状態への相転移が2次相転移であることを数学的に証明できた。

(5) 以上のようにして、超伝導における BCS 理論の土台たる BCS ギャップ方程式の解と BCS 理論での2次相転移とに対して数学的な裏づけを与えることに成功した。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計4件)

- ① Shuji Watanabe, Temperature dependence of the solution to the BCS gap equation, RIMS Kokyuroku, 査読有, 2012, in press
- ② Shuji Watanabe, The solution to the BCS gap equation and the second-order phase transition in superconductivity, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 査読有, Vol. 383, 2011, pp. 353-364

③ Shuji Watanabe, A mathematical proof that the phase transition to a superconducting state is a second-order phase transition, Far East Journal of Mathematical Sciences, 査読有, Vol. 34, 2009, pp. 37-57

④ Yoshio Ohnuki and Shuji Watanabe, Fourier type analysis originating from quantum mechanics, International Journal of Mathematical Sciences, 査読有, Vol. 8, 2009, pp. 1-30

[学会発表] (計4件)

① 渡辺秀司, 超伝導におけるBCSギャップ方程式の解の温度依存性, 数理物理学セミナー, 2011. 11. 17-18, 仏教大学(京都市)

② Shuji Watanabe, Temperature dependence of the solution to the BCS gap equation, International Symposium on Applications of the Renormalization Group Methods in Mathematical Sciences, 2011. 9. 12, Research Institute of Mathematical Sciences, Kyoto University (Kyoto)

③ 渡辺秀司, 超伝導におけるBCSモデルの数学的基礎付け, 山口大学工学研究科数学講演会, 2009. 11. 9-10, 山口大学工学研究科(山口市)

④ 渡辺秀司, 超伝導のBCSモデルにおける相転移の作用素論的扱い, 日本数学会関数解析学分会, 2009. 9. 24, 大阪大学(大阪市)

[その他]  
ホームページ等

[http://arxiv.org/find/grp\\_math/1/au:+Watanabe\\_Shuji/0/1/0/all/0/1](http://arxiv.org/find/grp_math/1/au:+Watanabe_Shuji/0/1/0/all/0/1)

<https://univ-db.media.gunma-u.ac.jp/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

渡辺 秀司 (WATANABE SHUJI)  
群馬大学・大学院工学研究科・教授  
研究者番号：90222405

### (2) 研究分担者

齋藤 三郎 (SAITOH SABUROU)  
群馬大学・名誉教授  
研究者番号：10110397

### (3) 連携研究者

( )

研究者番号：