

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 5月28日現在

機関番号：14501

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2011

課題番号：21540150

研究課題名（和文） 定常性に関する反映原理と集合論公理系の拡張

研究課題名（英文） Reflection principles on stationarity and possible extensions of the axiom system of set theory

研究代表者

瀧野 昌（SAKAÉ FUCHINO）

神戸大学・システム情報学研究科・教授

研究者番号：30292098

研究成果の概要（和文）：順序数の集合の定常性の反映原理と順序数の可算集合の集合の定常性の反映原理の間に位置する反映原理である Fodor-type Reflection Principle (FRP) が、これまでに Fleissner の Axiom R の帰結として知られていた位相空間論や無限グラフの理論などでの数学的な反映定理の多くと ZFC 上で同値になることを示した。FRP から Shelah's Strong Hypothesis が導かれることを示し、FRP と他の反映原理の間の含意の関係をほぼ完全に把握することに成功した。

研究成果の概要（英文）：In this research project, we studied the so-called Fodor-type Reflection Principle (FRP) which is situated between stationarity reflection of sets of ordinals and that of sets of countable sets of ordinals. We proved that FRP is equivalent to many of the "mathematical" reflection principles which have been known as consequences of Fleissner's Axiom R. We also proved that FRP implies Shelah's Strong Hypothesis and obtained an almost complete picture of the implications and non implications among reflection principles including FRP.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2010年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2011年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：数学基礎論

1. 研究開始当初の背景

2008年に研究代表者は共同研究者の Lajos Soukup と、その後研究代表者が Fodor-type Reflection Principle と命名することになる組合せ原理を定式化し、位相空間の metalindelöfness に関する反映定理をこの原理のもとで証明した。この組合せ原理はその後これまでに既に知られていた多くの数

学的な反映定理を導くことが明らかになってきた。

2. 研究の目的

本研究の目的は Fodor-type Reflection Principle を中心として様々な定常性に関する反映原理の間の関係を明かにし、これらの反映の原理から導かれる数学的な反映定理

の理解を深めることであった。また、反映原理の従来の集合論を拡張する公理系についての研究への関連を探るといふ、さらに大きな文脈への課題があった。

3. 研究の方法

本研究は数学研究に属するものである。数学研究一般に言えるように、研究の主な方法としては、ソファーに寝転んで考える、歩きながら考える、ベットに横になって考える、などである。ただし、関連文献の勉強のためには、もう少し通常のデスクワークに近い仕事の形式で事にあたることになることもある。一方、特に、研究代表者の研究方法では、共同研究者や類似の研究を行なっている研究者との研究討論も非常に重要なファクターとなるため（このことは主な発表論文のリストにあげた論文の共著者の多様性にも反映している）、討論の機会を作るための旅行や学会参加、また共同研究者や関連研究の研究者の研究代表者の所属大学への招待なども必要となる。本研究期間中、研究代表者は研究討論のために、Erwin Schrödinger Institute, Mathematical Research Institute Oberwolfach, Barcelona University 等を訪問し、共著論文の執筆者である Lajos Soukup, Sy Friedman, Victor Torres, また、関連研究の研究者ないしは将来の共同研究を計画している研究者である Aki Kanamori, Franklin Tall, Christoph Weiss, Joan Bagaria 等を神戸大学に招聘した。2012年1月にはオーストリアのFWFとJSPSの共催による本研究の研究テーマを含む「強制法の視点からの集合論」に関する二国間セミナーを神戸で行なったが、上にあげた共同研究者の1人である Victor Torres を含むチームの共同研究はこの機会に発足したものであった。

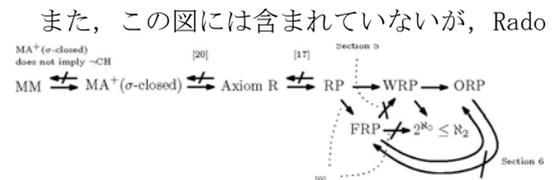
4. 研究成果

本研究の主要な成果として、Fodor-type Reflection Principle (FRP) が多くの数学的な反映定理と ZFC (通常集合論の公理系) 上同値になることが示されたことがあげられる。そのような数学的な反映定理の例としては、「局所コンパクトな任意の位相空間 X に対し、 X のすべての濃度が \aleph_1 以下の部分空間が距離付け可能なら、 X 自身も距離付け可能である」や、「任意のグラフ G に対し、 G のすべての濃度 \aleph_1 以下の部分グラフが可算な coloring number を持つなら、 G 自身も可算な coloring number を持つ」があげられる。

雑誌論文 ④ としてあげた Assaf Rinot との共著論文では、FRP から Shelah's Strong Hypothesis が導かれることを示し、このことを用いて、ブール代数 B が openly

generated であることと、 B の任意の濃度 \aleph_1 の部分ブール代数が openly generated であることの同値性が、ZFC 上 FRP と同値になることを示した。

また、現在投稿中の論文で、FRP と他の stationarity に関する反映原理との含意関係を調べ、WRP から FRP への global な non-implication を除くと、すべての場合について含意関係が rigid であることを示した (下図参照)。



Conjecture (RC) が FRP を導くことが明らかになった。RC は Martin's Maximum と矛盾するので、この結果は、この方向の研究の新しい展開の可能性を示唆するものとなっている。

本研究の大きな目標は、定常性に関する反映原理の考察を足掛りとして、集合論の公理系の拡張に対する考察をすることでもあったが、この方向への研究の第一歩として、雑誌論文 ① としてあげたもの、および現在投稿中の Sy-David Friedman, Hiroshi Sakai との共著論文では、集合論のモデルの総体を数学的な研究対象としてとらえる set-theoretic multiverse の考え方に関連した考察を行なった。

Martin's Maximum がある意味でその正当性の議論のできるような、集合論の“正しい公理”の候補と見られるものであるのに対し、FRP や RC は組合せ原理と呼ぶべき性格を持つものとなっている。FRP または RC の拡張あるいは変形で正しい公理の候補としての資質を持つものをさがし出すことは、今後の研究の1つの重要な課題になるように思える。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計6件)

- ① Sakaé Fuchino, The Set-theoretic multiverse as a mathematical plenitudinous Platonism viewpoint, Annals of the Japan Association for the Philosophy of Science, 検読有, Vol.20, 2012, 49--54.

② Sakaé Fuchino, Remarks on the coloring number of graphs, 京都大学数理解析研究所講究録, 検読無, No.1754, 2011, 6--16.

③ 渕野 昌, R. Dedekind の数学の基礎付けと集合論の公理化, 京都大学数理解析研究所講究録, 検読無, No.1739, 2011, 168--179.

④ Sakaé Fuchino and Assaf Rinot, Openly generated Boolean algebras and the Fodor-type Reflection Principle, Fundamenta Mathematicae, 検読有, 212, 2011, 261-283.

⑤ Sakaé Fuchino, István Juhász, Lajos Soukup, Zoltán Szentmiklóssy and Toshimichi Usuba, Fodor-type Reflection Principle and reflection of metrizable and meta-Lindelöfness, Topology and its Applications, 検読有, Vol.157, 8, 2010, 1415-1429.

⑥ Sakaé Fuchino, Fodor-type Reflection Principle and Balogh's reflection theorems, 京都大学数理解析研究所講究録, 検読無, No.1686, 2010, 41--58.

[学会発表] (計7件)

① Sakaé Fuchino, "On reflection of list chromatic number", FWF/JSPS joint seminar on "Forcing in Set Theory", 2012年1月23日, 神戸大学システム情報学研究科, 日本.

② Sakaé Fuchino, "On reflection of list chromatic number", Twelfth Asian Logic Conference, 2011年12月19日, Victoria University, Wellington, ニュージーランド, (招待講演).

③ Sakaé Fuchino, "Reflection of some properties of uncountable structures", Advanced Course and Workshop on Large-Cardinal Methods in Homotopy, 2011年9月8日, Universitat de Barcelona, ス

ペイン (招待講演).

④ Sakaé Fuchino, "Fodor-type reflection principle and very weak square principle", Set theory workshop, 2011年1月13日, Oberwolfach 数学研究所, Oberwolfach, ドイツ (招待講演).

⑤ Sakaé Fuchino, "Set theoretic reflection principles and topological reflection", V. International Conference Japan-Mexico on Topology and its Applications, 2010年9月24日, Colima, メキシコ (招待講演).

⑥ 渕野 昌, "Topological characterizations of some set-theoretic principles", 日本数学会 2010年秋季総合分科会, 2010年9月24日, 名古屋大学, 日本.

⑦ Sakaé Fuchino, "Fodor-type Reflection Principle and its 'mathematical' characterizations", ESI workshop on large cardinals and descriptive set theory, 2009年6月15日, ウィーン大学 Erwin Schrödinger 研究所, オーストリア (招待講演).

[その他]

ホームページ等

<http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/grants.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

渕野 昌 (SAKAÉ FUCHINO)

神戸大学・システム情報学研究科・教授
研究者番号: 30292098

(2) 研究分担者

(3) 連携研究者

(4)研究協力者

Lajos Soukup (ライオシュ・ソウクプ)
ハンガリー科学アカデミー・レニ数学研究
所・教授

Sy-David Friedman (フリードマン・サイ
ダビド)
ウィーン大学・クルト・ゲーデル研究センタ
ー・教授

酒井 拓史 (HIROSHI SAKAI)
神戸大学・システム情報学研究科・講師
研究者番号： 70468239

薄葉 季路 (TOSHIMICHI USUBA)
名古屋大学・高等研究院・特任助教
研究者番号： 10513632