

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 5月29日現在

機関番号：12401

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2011

課題番号：21540163

研究課題名（和文） 非線形波動方程式系の孤立波解の安定性解析

研究課題名（英文） Stability analysis on solitary wave solutions for systems of nonlinear wave equations

研究代表者

太田 雅人（OHTA MASAHIRO）

埼玉大学・大学院理工学研究科・准教授

研究者番号：00291394

研究成果の概要（和文）：非線形シュレディンガー方程式の定在波解の不安定性に関する標準理論の改良を行った。特に、安定性と不安定性の境目にあたる場合の不安定性に関する新しい結果を証明した。また、その抽象理論をプラズマ中のラマン増幅現象に関連した非線形シュレディンガー方程式系に適用した。さらに、一般的な条件の下で、線形不安定性から非線形不安定性が導かれることを証明した。

研究成果の概要（英文）：We improved the standard theory on instability of standing wave solutions for nonlinear Schrodinger equations. In particular, we proved a new instability result for a borderline case between stability and instability. Moreover, we applied the abstract theory to a system of nonlinear Schrodinger equations related to the Raman amplification in plasma. Furthermore, under a general condition, we proved that linear instability implies nonlinear instability.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2010年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2011年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：非線形偏微分方程式、非線形シュレディンガー方程式、非線形波動方程式、孤立波、定在波、安定性、不安定性

## 1. 研究開始当初の背景

ボルドー大学の Mathieu Colin 氏と Thierry Colin 氏は 2004 年に出版された論文においてレーザーとプラズマの相互作用を記述するザハロフ型の準線形の連立方程式系を導出した。研究代表者は、その直後の 2004 年ごろから、両氏とこの方程式系の孤立波解の安定性に関する共同研究を開始した。両氏が導出した方程式系は、非線形項に微分を含む

準線形の方程式系であり、そのままでは孤立波解の安定性を議論するのは困難であった。そこで、元の方程式系の本質的な部分を抽出し簡略化した 3 波相互作用をもつ 3 成分の半線形シュレディンガー方程式系を導き、さらに、単独の非線形シュレディンガー方程式の定在波解から作られる半自明な孤立波解の安定性と不安定性について調べた。

## 2. 研究の目的

3波相互作用係数を分岐パラメータと考え、半自明な孤立波解の安定性と不安定性が入れ替わるパラメータの近傍における分岐解析を行う。予想として、その点において、2成分が恒等的に0であるような半自明な孤立波解から、すべての成分が正值であるような安定な孤立波解が分岐していることが期待されるが、これは不安定化した半自明な孤立波解の漸近挙動に関連して興味深い問題であると考えられる。その他、3波相互作用係数が十分小さい領域、あるいは十分大きい領域において、特徴的な孤立波解の存在、およびその安定性を明らかにすることを目的とする。

## 3. 研究の方法

(1) 3波相互作用をもつ非線形シュレディンガー方程式系の孤立波解の安定性解析について、ボルドー大学の Mathieu Colin 氏及び Thierry Colin 氏と共同研究を行うために、研究代表者がボルドー大学に出張した。また、Mathieu Colin 氏が2012年2月に1週間、埼玉大学を訪問した。

(2) 非線形シュレディンガー方程式の定在波解の線形不安定性和非線形不安定性の関係について、ピサ大学の Vladimir Georgiev 氏と共同研究を行った。

(3) 本研究と密接に関連する変分法の研究者と研究打合せを行った。また、非線形波動方程式だけではなく、反応拡散方程式系に関する研究者と研究打合せを行ない、本研究の参考とした。

(4) 国内及び海外で開催された研究集会に参加し、情報収集および意見交換を行った。また、埼玉大学解析ゼミに関連する研究者を招聘し、講演をしてもらった。

(5) 解析学関連、数理物理関連の図書など本研究に必要な文献を揃えた。

## 4. 研究成果

(1) 非線形シュレディンガー方程式の定在波解に対する線形不安定性和非線形不安定性の関係について、Vladimir Georgiev 氏(ピサ大学)と共同研究を行った。線形不安定ならば非線形不安定であることが期待されるが、従来の研究では、非線形項及び次元にかなり強い仮定が必要であった。本研究では、定在波解の周りでの線形化方程式に対する適切なストリッカーツ型評価式を確立し、一般次元における一般的な非線形項に対して、この問題を解決した。

(2) 抽象的非線形シュレディンガー方程式の束縛状態の不安定性に関する、これまでの理論を見直し、その一般化及び証明の簡易化を行った。さらに、安定性と不安定性の境目にあたる場合の不安定性に関する新しい十分条件を与えた。

(3) プラズマ中のラマン増幅現象に関連した、非線形シュレディンガー方程式系について、Mathieu Colin 氏(ボルドー第1大学)と共同研究を行った。我々の以前の研究では、半自明な定在波解の安定性と不安定性について調べてきた。本研究では、ある特殊な状況ではあるが、この半自明定在波解から分岐する非自明な定在波解の大域的構造及びその安定性、分岐点における半自明定在波解の安定性、基底状態の完全な分類を行った。特に、分岐点においては、高次の非線形摂動の取り方により、安定な場合と不安定な場合が実際に両方とも現れることを証明することができた点は大きな成果であると考えている。

(4) ボーズ・アインシュタイン凝縮などのモデル方程式として現れる、3次の非線形項とトラップ・ポテンシャルを含む、非線形シュレディンガー方程式の2成分連立系を空間2次元において考察した。成分間に対称性がある場合には、対応する単独方程式の基底定在波解から連立系の定在波解が得られるが、半古典近似領域において、その定在波解の安定性について研究し、成分間の相互作用が引力的な場合は軌道安定であり、逆に斥力的な場合は軌道不安定であることを示した。成分間の相互作用が引力的な場合の結果は、T.-C. Lin and J. Wei (2008) の結果の若干の拡張であるが、より重要な点は、証明を大幅に簡略化したことである。結論として、成分間に対称性がある場合は、連立系の定在波解の安定性は、対応する単独方程式の定在波解の安定性から簡単に導くことができることを明らかにした。一方、成分間の相互作用が斥力的な場合の定在波解の軌道不安定性は線形不安定性を示すことにより証明した。なお、この不安定性に関しては、空間1次元でポテンシャルを含まない場合に対しても同様に証明することができる。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 7 件)

- ① M. Colin and M. Ohta, Bifurcation from semitrivial standing waves and ground states for a system of nonlinear Schrödinger equations, *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 44 (2012) pp.206-223. 査読有
- ② M. Ohta, Instability of bound states for abstract nonlinear Schrödinger equations, *Journal of Functional Analysis* 261 (2011) pp.90-110. 査読有
- ③ H. Kikuchi and M. Ohta, Stability of standing waves for the Klein-Gordon-Schrödinger system, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 365 (2010) pp.109-114. 査読有
- ④ M. Kaminaga and M. Ohta, Stability of standing waves for nonlinear Schrödinger equation with attractive delta potential and repulsive nonlinearity, *Saitama Mathematical Journal* 26 (2009) pp.39-48. 査読有
- ⑤ M. Colin, Th. Colin and M. Ohta, Instability of standing waves for a system of nonlinear Schrödinger equations with three-wave interaction, *Funkcialaj Ekvacioj* 52 (2009) pp.371-380. 査読有
- ⑥ M. Colin, Th. Colin and M. Ohta, Stability of solitary waves for a system of nonlinear Schrödinger equations with three wave interaction, *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Analyse Non Linéaire* 26 (2009) pp.2211-2226. 査読有
- ⑦ M. Ohta and G. Todorova, Remarks on global existence and blowup for damped nonlinear Schrödinger equations, *Discrete and Continuous Dynamical Systems* 23 (2009) pp.1313-1325. 査読有

[学会発表] (計 20 件)

- ① 太田雅人, 非線形シュレディンガー方程式系の定在波の安定性, 第 61 回理論応用力学講演会, 東京大学生産技術研究所, 2012 年 3 月 7 日.
- ② 太田雅人, Stability of standing waves for a system of nonlinear Schrödinger equations, 第 9 回浜松偏微分方程式研究集会, 静岡大学工学部, 2011 年 12 月 27 日.
- ③ 太田雅人, Stability of standing waves for a system of nonlinear Schrödinger equations, 弘前非線形方程式研究会, 弘前大学, 2011 年 12 月 23 日.
- ④ M. Ohta, Stability of standing waves for a system of nonlinear Schrödinger equations, Stability problems in nonlinear dispersive PDEs, Université de Cergy-Pontoise, France, 2011 年 11 月 24 日.
- ⑤ 太田雅人, Stability of standing waves for a system of nonlinear Schrödinger equations in a critical case, *Linear and Nonlinear Waves* No. 9, ピアザ淡海, 2011 年 11 月 4 日.
- ⑥ M. Ohta, Standing waves for a system of nonlinear Schrödinger equations, One Forum, Two Cities: Aspect of Nonlinear PDEs, National Taiwan University, 2011 年 9 月 1 日.
- ⑦ M. Ohta, Standing waves for a system of nonlinear Schrödinger equations, 第 36 回偏微分方程式論札幌シンポジウム, 北海道大学, 2011 年 8 月 24 日.
- ⑧ 太田雅人, Nonlinear instability of linearly unstable standing waves for nonlinear Schrödinger equations, OCAMI 楕円型方程式研究集会—定常非線形シュレディンガー方程式の定在波解の研究—, 大阪市立大学, 2011 年 8 月 11 日.
- ⑨ M. Ohta, Stability of standing waves for a system of NLS with a three-wave interaction, The second Chile-Japan workshop on nonlinear elliptic and parabolic PDEs, 明治大学, 2009 年 12 月 1 日.
- ⑩ M. Ohta, Stability of standing waves for some systems of nonlinear Schrödinger equations with three-wave interactions, The 7th International ISAAC Congress, Imperial College London, UK, 2009 年 7 月 14 日.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

太田 雅人 (OHTA MASAHIITO)  
埼玉大学・大学院理工学研究科・准教授  
研究者番号：00291394

(2) 研究分担者

( )

研究者番号：

(3) 連携研究者

小池 茂昭 (KOIKE SHIGEAKI)  
埼玉大学・大学院理工学研究科・教授  
研究者番号：90205295

長澤 壯之 (NAGASAWA TAKEYUKI)  
埼玉大学・大学院理工学研究科・教授  
研究者番号：70202223

町原 秀二 (MACHIARA SHUJI)  
埼玉大学・教育学部・准教授  
研究者番号：20346373