

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 5 日現在

機関番号：16101

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2009～2013

課題番号：21540186

研究課題名(和文) 波動現象とプラズマ現象に対応する非線形偏微分方程式の解構造の解析

研究課題名(英文) Analysis of the solution structure of non-linear partial differential equations corresponding to the wave phenomena and plasma phenomena

研究代表者

小野 公輔 (ONO, KOSUKE)

徳島大学・大学院ソシオ・アーツ・アンド・サイエンス研究部・准教授

研究者番号：00263806

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円、(間接経費) 990,000円

研究成果の概要(和文)：波動現象を記述する非線形消散型波動方程式やプラズマ現象を記述するボラソフ系方程式などに関連する数学方面からの研究を行った。本研究成果はいくつかの学術論文としてまとめ、国内外の雑誌に発表した。例えば、穏やかに退化した準線形双曲型偏微分方程式の初期値境界値問題における解の大域解の一意存在と上と下からの漸近挙動に関する結果を得た。また、それらの結果を得るための初期値や波動指数の条件を明らかにすることができた。

研究成果の概要(英文)：I conducted a study of mathematics relating to non-linear dissipative wave equations describing wave phenomena and Vlasov type equations describing plasma phenomena. I summarized the results of this research as academic papers and I published in magazines at home and abroad. For example, I got the results on the existence and uniqueness of global solutions and the asymptotic behaviors from the top and bottom of the solutions for degenerate quasi-linear hyperbolic partial differential equations to the initial boundary value problem. Further, I investigated on the conditions of the wave coefficient and the initial data for obtaining the results.

研究分野：1数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：準線形退化型波動方程式 非線形偏微分方程式

## 1. 研究開始当初の背景

数学による社会現象や自然現象の解析には、その現象に対応する関数微分方程式や非線形偏微分方程式を利用することが多く、理工系の実験やその検証のための評価に利用されていて、数学方面には数学的な道具の開発や理論の構築が求められている。また、物理学における波動現象を記述する非線形消散型波動方程式やプラズマ現象を記述する Vlasov-Poisson 方程式などに関連する解空間の構造の解析や解の漸近挙動に関する数学方面からの解析が求められている状況にある。

プラズマ現象を記述する Vlasov-Poisson 方程式に関しては解の漸近挙動に関する詳細な減衰評価式の導出が求められていた。また、退化したキルヒホッフタイプの消散型波動方程式に対しては、下からの減衰評価式の詳しい解析が十分とは言えない状況にあり、詳しい解析が求められていた。また、そのために必要となる条件を波動係数や初期値のサイズの条件で与える場合の関係式などが明らかになっていなかった。さらに、初期値が小さいときに、藤田指数を臨界指数にもつ自己相互作用に関連した非線形項をもつ非線形消散型波動方程式の時間大域解の一意存在定理の研究が盛んに行われていて、その解析に解の減衰評価式の応用が期待されていた。また、自己相互作用の非線形項をもつ双曲型偏微分方程式に関しては大域解の一意存在についての解析の進展が求められていた。

## 2. 研究の目的

自然現象、社会現象、生命現象の現実社会に現れる現象を数理モデルを用いて解析するための数学方面からの理論の構築に貢献することが研究の目的である。本研究では数理モデルの多くを提供する非線形偏微分方程式を研究の対象としている。特に、自然界における波動現象を考えると必然的に対応する方程式は非線形となり、摩擦抵抗の影響（例えば、音の伝搬を考えたときの空気による摩擦抵抗など）を考慮して方程式を考えた方が自然であることから、摩擦項を持つ波動方程式（消散型波動方程式や消散型キルヒホッフ方程式など）を研究対象とし、解空間の構成および解空間の構造の解析を主要テーマとしている。また、解の時間大域的存在、一意性、漸近挙動、大域的非存在、散乱問題といった一連の相互に関連し合う問題に対して新しい結果を得ることを目指している。プラズマ現象に関連する非線形偏微分方程式はプラズマ物理学によって数多く考案されているが、その中でも Vlasov 方程式関連の基礎方程式を研究対象とし、解空間の構成を行い、解の漸近挙動、解の滑らかさに関する

問題の研究を行うことが研究の目的となる。

## 3. 研究の方法

自然現象を記述する非線形偏微分方程式に関する研究、特に、波動現象を記述する非線形波動方程式に関する研究やプラズマ物理学に現れるプラズマ関連の基礎方程式に関する研究は、楕円型方程式、放物型方程式、および、双曲型方程式等の様々な偏微分方程式と密接な関係があり、これらの偏微分方程式の研究を行っている研究者との研究討論および情報の交換等は研究を進めて行く上で必要不可欠のものである。そのためにも、学会だけではなく各地で開催されている研究会等にも参加することになる。また、研究成果の発表を行い研究討議を通して研究成果のアピールに繋げていくことが必要となる。一方、大学内の雑誌あるいは資料といった研究を進めている上で、必要なものが不足している上に、独立行政法人化による予算の削減により国際レベルの研究の継続が困難になってきている。従って、他大学あるいは研究所等へ情報収集および資料収集に力をつけて行くことになる。また、コンピュータの普及により、コンピュータによる偏微分方程式の解の漸近挙動に関する数値解析や数値シミュレーションおよびグラフ表示による解析が重要な役割を果たすようになってきている。そこで、コンピュータやその支援ソフトを購入し、コンピュータを研究の有効な道具の一つとして役立てていくことになる。研究そのものの方法としては、新しい定理の発見とその証明を行い国内外の雑誌に掲載していくことになる。また、証明の方法には数学的な手法をもちいるが、特に、全空間におけるコーシー問題に対する非線形波動方程式の解析には実解析的な手法や関数解析的な手法が有効であり、主に、エネルギー法やフーリエ解析法を用いている。また、外部問題に対する研究では、全空間における結果を利用すると共にカット・オフ法や局所エネルギー法なども利用したり、結果を予測するためにコンピュータを活用する。

## 4. 研究成果

研究した成果の一部は学術論文として学術論文紙に投稿掲載したり、研究会等で講演を行ったりしてきた。国内外の雑誌に掲載することでこの分野の研究の進歩や現象解析に対して数学方面からの貢献をすることができた。以下では学術論文としてまとめることができたものについて説明を加えることにする。

(1) 退化した連立双曲型偏微分方程式の有界領域における初期値境界値問題に対する大

域解の一意存在と解の減衰に関する研究を行った。非線形項の指数が任意の正の数であればすべて取り扱える形で定理の条件式を与えた。また、解の減衰評価式の指数が上下で同じになることを明らかにした。

(2)非有界の場合のコーシー問題に対する退化したキルヒホッフタイプの消散型波動方程式について研究した。これまで知られていたエネルギーの減衰評価式に加えて、解の2次導関数についても減衰評価式を与え、さらに、解自身の下からの減衰評価式についても詳しい解析を行った。

(3)非退化のキルヒホッフタイプの消散型波動方程式の有界領域における初期値境界値問題に対する大域解の一意存在と解の減衰に関する研究を行った。特に、これまでよく知られていた上からの指数関数的減衰の評価に加えて、下からの指数関数的減衰についても明らかにした。

(4)弱い摩擦項をもつ一般次元の退化した双曲型偏微分方程式の有界領域における初期値境界値問題に対する大域解の一意存在と解の減衰に関する研究を行った。新しい恒等式を利用することにより、以前研究していた解の上からの減衰評価に加えて、下からの減衰評価式を与えた。

(5)吸収型自己相互作用の非線形項と摩擦項をもつ1次元のキルヒホッフ方程式の初期値境界値問題に対する大域解の一意存在と解の減衰に関する研究を行った。特に、非線形項を一般化し、さらに、2つの非線形項に関する指数がより広いクラスで扱えるような形で定理をまとめた。

(6)発散型自己相互作用の非線形項と摩擦項をもつ1次元のキルヒホッフ方程式の初期値境界値問題に対する大域解の一意存在に関する研究を行った。修正されたエネルギー法に加えて、修正されたポテンシャルの井戸の方法を用いた解析を行った。解の減衰についてもいくつかの評価式を与えた。

(7)1次元のキルヒホッフ方程式が吸収型自己相互作用の非線形項と摩擦項を持つ場合の初期値境界値問題に対する大域解の一意存在と解の減衰に関する研究を行った。特に、非線形項の指数が1以上の場合を取り扱っていて、一連の結果を得るための初期値のサイズに関する仮定を明らかにした。

(8)連立の消散項をもつ退化した双曲型偏微分方程式系の初期値境界値問題に対して、波動係数もしくは初期値が小さいときに時間大域解の存在と一意性についての証明を行った。また、解の $H^2$ ノルムに関する上と下からの厳密な減衰評価式および2次導関数までの上からの減衰評価式を与えた。

(9)コンパクト台をもつ初期値のもとで、初期値問題に関する消散型波動方程式のエネルギーの減衰評価式について研究した。これまでに分かっている領域をさらに広げた部分におけるエネルギーが多項式のオーダーで減衰することを重み付エネルギー法を用

いて示した。

(10)強い消散項を持つ退化した双曲型偏微分方程式系の初期値境界値問題に対する解の減衰評価式に関する研究を行った。特に、上下から同じ減衰指数をもつ減衰評価式を導いた。また、下からの評価式では、必要となる初期値または波動指数のサイズに関する条件式を導いた。

(11)線形の消散項をもつ退化したキルヒホッフタイプの波動方程式の初期値境界値問題について研究した。波動係数と初期値のどちらかがある程度小さいときに時間大域解の存在と一意性を示した。また、解の $H^2$ ノルムに関しては上下から同じオーダーの評価式を与えた。時間に関する1次と2次の導関数に関する減衰評価式についても期待できる減衰オーダーを与えた。

(12)強い消散項をもつ退化したキルヒホッフタイプの波動方程式の初期値境界値問題の減衰評価式に関する研究を行った。解の空間方向の1次導関数の減衰評価式については上下から同じ減衰オーダーの評価式を与えた。さらに、空間方向の2次導関数に関する多項式程度の減衰評価式が得られることを示した。

(13)初期値境界値問題に対する強い消散項をもつキルヒホッフタイプの波動方程式の解の下からの減衰評価式に関する研究を行った。Nishiharaによって知られていた下からの減衰評価式は時間遠方での結果であったが、解析方法を変更することにより、初期時刻からの評価式に修正した。

(14)4次元以上の全空間でのコーシー問題に対するVlaso-Poisson systemの解および密度関数の $L^p$ タイプの減衰評価式に関する研究を行った。証明にはいくつかの恒等式を導きHardy-Littlewood-Sobolevの不等式など利用して非線形項の処理を行った。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 14件)

Kosuke Ono, Global existence and decay properties of solutions for coupled degenerate dissipative hyperbolic systems of Kirchhoff type, FUNKCIALAJ EKVACIOJ, 印刷中, 2014. 査読有

Kosuke Ono, Decay estimates of solutions for mildly degenerate Kirchhoff type dissipative wave equations in unbounded domains, Asymptotic Analysis, Vol.88, pp.75--92, 2014. 査読有

Kosuke Ono, Lower decay estimates for non-degenerate dissipative wave

equations of Kirchhoff type, *Scientiae Mathematicae Japonicae Online*, Vol.e-2014, pp.43--53, 2014. 査読有  
Kosuke Ono, On asymptotic behavior for degenerate hyperbolic equations with weak dissipation, *J. Math. Tokushima Univ.*, Vol.47, pp.15--23, 2013. 査読無  
Kosuke Ono, On decay estimates of solutions for some degenerate nonlinear Kirchhoff strings with dissipation, *International Journal of Applied Mathematics*, Vol.26, pp.349--361, 2013. 査読有  
Kosuke Ono, Asymptotic behavior of solutions for mildly degenerate quasilinear hyperbolic equations, *Journal of Mathematical Sciences: Advances and Applications*, Vol.21, pp.39--48, 2013. 査読有  
Kosuke Ono, On existence of global solutions for some mildly degenerate nonlinear Kirchhoff strings with linear dissipation, *J. Math. Tokushima Univ.*, Vol.46, pp.13--22, 2012. 査読無  
Kosuke Ono, Global existence and decay rate for a coupled degenerate hyperbolic system with dissipation, *Scientiae Mathematicae Japonicae*, Vol.74, pp.1--13, 2011. 査読有  
Kosuke Ono, Energy decay for a dissipative wave equation with compactly supported data, *J. Math. Tokushima Univ.*, Vol.45, pp.41--47, 2011. 査読無  
Kosuke Ono, Decay estimates for coupled degenerate hyperbolic system with strong damping, *International Journal of Applied Mathematics*, Vol.24, pp.383--392, 2011. 査読有  
Kosuke Ono, On sharp decay estimates of solutions for mildly degenerate dissipative wave equations of Kirchhoff type, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, Vol.34, pp.1339--1352, 2011. 査読有  
Kosuke Ono, On decay properties of solutions for degenerate strongly damped wave equations of Kirchhoff type, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol.381, pp.229--239, 2011. 査読有  
Kosuke Ono, A lower decay estimate for a degenerate Kirchhoff type wave equation with strong dissipation, *J. Math. Tokushima Univ.*, Vol.44, pp.27--31, 2010. 査読無  
Kosuke Ono, On decay properties of solutions for the Vlasov--Poisson system, *J. Math. Tokushima Univ.*,

Vol.43, pp.25--30, 2009. 査読無

[学会発表](計 6件)

小野公輔, Global solvability and decay estimates for mildly degenerate dissipative wave equations of Kirchhoff type, 2014 日本数学会年会, 学習院大学(東京都), 2014.3.16.

小野公輔, On asymptotic behaviour for nondegenerate Kirchhoff type dissipative wave equations, 日本数学会中国四国支部例会, 島根大学(島根県), 2014.1.26.

小野公輔, On decay estimates for some degenerate nonlinear Kirchhoff strings with dissipation, 日本数学会中国四国支部例会, 高知大学(高知県), 2013.1.27.

小野公輔, 退化した消散型波動方程式の時間大域的可解性と減衰評価式, 日本数学会中国四国支部例会, 岡山大学(岡山県), 2012.1.22.

小野公輔, Global Existence and Decay Estimates of Solutions for Mildly Degenerate Dissipative Wave Equations of Kirchhoff Type, 徳島数学談話会, 徳島大学(徳島県), 2011.12.16.

小野公輔, Global solvability and decay estimates for mildly degenerate dissipative wave equations of Kirchhoff type, 2011 日本数学会年会, 早稲田大学(東京都), 2011.3.22.

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

小野 公輔 (ONO KOSUKE)

徳島大学・大学院 ソシオ・アーツ・アンド・サイエンス研究部・准教授

研究者番号：00263806