

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 6月 3日現在

機関番号：24506

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2012

課題番号：21540193

研究課題名（和文） 閾値エネルギーにおける量子ハミルトニアンの特異点解析

研究課題名（英文） SPECTRAL ANALYSIS OF QUANTUM HAMILTONIANS AT THRESHOD ENERGIES

## 研究代表者

様田 登美男（UMEDA TOMIO）

兵庫県立大学・大学院物質理学研究科・教授

研究者番号：20160319

研究成果の概要（和文）：原子のようなミクロの世界を説明する量子力学において数学的根幹をなすディラック方程式のエネルギーに関する数学的研究を実施した。電子・陽電子の対生成の理論的説明で鍵を握ると考えられている閾値エネルギーに関連する数学的現象の一端を解明した。物質の安定性の理論的説明で重要な関数の無限系列を見いだした。閾値エネルギーに付随する重要な関数、および関連する重要な不等式に関して数学的に新しい現象を見いだした。

研究成果の概要（英文）：We investigated mathematical properties of energies of Dirac operators, which play fundamental roles in quantum mechanics, describing states of tiny particles like atoms. We found a few of new mathematical phenomena on threshold energies which are considered to be clues in theoretical explanations of the electron-positron pair creation. We also found an infinite series of functions, which play significant roles in the theoretical treatments of stability of matter. In addition, we discovered a mathematical phenomenon in connection with some important inequalities and with some important functions at threshold energies.

## 交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	800,000	240,000	1,040,000
2010年度	900,000	270,000	1,170,000
2011年度	800,000	240,000	1,040,000
2012年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：関数方程式、スペクトル理論、固有関数

## 1. 研究開始当初の背景

量子力学の数学的研究に現れる作用素としては、シュレディンガー作用素、ディラック作用素、相対論的シュレディンガー作用素、ワイル・ディラック作用素、パウリ作用素が主なものであるが、どの作用素に関しても、その閾値エネルギーの重要性は認識されて

いるにも拘らず、これらの作用素の閾値エネルギー、付随する固有関数、レゾナンス状態に焦点を当てた研究は稀、あるいは皆無であった。研究開始時点では、閾値エネルギーにおいて次の4つの場合が起こりうるとの共通理解が研究者の間であった：

[1] 固有値であるが、レゾナンスでない；

- [2] 固有値でないが、レゾナンスである；
- [3] 固有値であり、かつレゾナンスである；
- [4] 固有値でもなく、レゾナンスでもない。

これら4つの可能性がどのように起こるのか、起こらないのか、また起こるとすれば、それは稀に起こるのか、そうでないのか？これらの視点からの研究は多くなかったし、[1]～[3]の場合には、付随する関数(固有関数、あるいはレゾナンス状態)の性質は殆ど解明されていなかった。

(1) シュレディンガー作用素の低エネルギー漸近解析ではゼロ・エネルギーが閾値エネルギーになるが、起こりうる4つの可能性の内、[1]あるいは[4]の場合に限定された研究が多かった。これは閾値エネルギーの解析が困難なためであった。

(2) 非線形ディラック方程式の解のうち、スタンディング・ウェーブ解の安定性、不安定性にワイル・ディラック作用素のゼロ・エネルギーが大きく関わる事が判っていたが、やはり4つの可能性の内、[4]の場合に限定されて研究されてきた。理由は上記(1)と同じである。

(3) 物質の安定性の理論ではワイル・ディラック作用素のゼロ・エネルギーが固有値であるという事実が決定的な役割を果たす。しかし、付随する固有関数の性質の研究は皆無であった。

(4) 質量項を持つディラック作用素、および相対論的シュレディンガー作用素については、閾値エネルギーは勿論、付随する固有関数、レゾナンス状態に関して公表された研究は存在しなかった。

(5) パウリ作用素に関してもゼロ・エネルギーに付随する固有関数、レゾナンス状態に関する研究は存在しなかった。

## 2. 研究の目的

種々の量子ハミルトニアン(質量項)の閾値エネルギーで起こりうる4つの可能性が実際に起こるのか、起こらないのかを解明すること。起こる場合には、何が起こるのかを明らかにすること。特に、閾値エネルギーに付随する固有関数が如何なる挙動を示すのかを調べる。また、閾値エネルギーに付随する固有関数の具体例を構成すること。

## 3. 研究の方法

- (1) 特殊な具体例2つに対して、ワイル・

ディラック作用素のゼロ・モードが可解な代数方程式に対応することを手計算で見いだした。これをヒントにしてコンピュータの数式処理プログラムを用いてアルゴリズムを作成。同様な対応関係にあるゼロ・モードと可解代数方程式の組を25個見いだした。これに基づいて立てた仮説を数学的に証明した。代数的計算が中心である。これは雑誌論文①の研究で用いた手法。

(2) 超対称性理論における論法を改良して磁場付きディラック作用素に適用した。また解析的フレドホルム理論を援用した。以上は抽象的な関数解析学的手法と実解析的手法を組み合わせたものである。純粋に実解析的手法に基づいて、閾値エネルギーでの共鳴状態の評価式を導き、これを共鳴状態に適用した。これらは雑誌論文②の研究で用いた手法。

(3) 自由マスレス・ディラック作用素のゼロ・モードの挙動を積分核の表示に基づいて導いた。この結果をディラック作用素、パウリ作用素の閾値エネルギーに付随する固有関数の挙動と関連づけるために、超対称性理論、スペクトル写像定理を用いた。これは雑誌論文③の研究で用いた手法。

(4) 弱 $L^1$ 空間における弱ヘルダー不等式を示した。これを用いてリース・ポテンシャルに関する新しい不等式を導いた。 $L^1$ 空間において、従来予想されていたディラック・ソボレフ不等式が成立しないことを示すのにワイル・ディラック作用素のゼロ・モードを用いた。これは雑誌論文④の研究で用いた手法。

## 4. 研究成果

(1) ワイル・ディラック作用素のゼロ・モードの無限系列と、この系列と対応関係にある可解代数方程式の無限系列が存在することを証明した。5次以上の代数方程式は解の公式がない(ガロアの結果)ので、可解な代数方程式の無限系列が見つかったことはそれ自身興味深いことである。さらに、その系列が偏微分方程式の解の無限系列に伴うものである点を示したところがこの研究の意義深いところであると考えている。

(2) 磁場付きディラック作用素が閾値エネルギーを固有値に持つのは稀であること、また閾値エネルギーは共鳴状態を持たないことを示した。この成果は数学的に新しいのみならず、さらに実験物理学の最近の技術的進展により、本研究の成果に関わる物理理論の実験的検証が近い将来に可能と期待される

ため、大変興味を持たれている。

(3) 磁場付きディラック作用素が閾値エネルギーを固有値に持つときの固有関数の漸近挙動を解明した。これは上記(2)と同じ理由で興味を持たれている成果である。パウリ作用素の閾値エネルギーに関する最新の研究の展望を与えた。

(4) 弱  $L^1$  空間におけるディラック・ハーディー不等式、ディラック・ソボレフ不等式を証明した。これらの不等式に対する最良定数の評価も与えた。これらの不等式は想定外の形をしており、今後徐々に真価が認められるものと考えている。 $L^1$  空間において予想されていた形のディラック・ハーディー不等式、ディラック・ソボレフ不等式は成立しないことも同時に示した。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計4件)

①Yoshimi Saito, Tomio Umeda; A sequence of zero modes of Weyl-Dirac operators and an associated sequence of solvable polynomials, Operator Theory: Advances and Applications 査読あり, Vol.219, 2012, pp.197-209.

<http://de.arxiv.org/pdf/1101.3133.pdf>

②Yoshimi Saito, Tomio Umeda; Eigenfunctions at the threshold energies of magnetic Dirac operators, Reviews in Mathematical Physics 査読あり, Vol.23, 2011, pp.155-178.

<http://de.arxiv.org/pdf/0905.0961.pdf>

③Yoshimi Saito, Tomio Umeda; Threshold eigenfunctions and threshold resonances of some relativistic operators, Physics, Chemistry, Mathematics 査読あり, Vol.2, 2011, pp.1-8.

④Alexander Balinsky, W. Desmond Evans, Tomio Umeda; The Dirac-Hardy and Dirac-Sobolev inequalities in  $L^1$ , Publications of Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto Univ. 査読あり, Vol.47, 2011, pp.791-801.

<http://de.arxiv.org/pdf/1101.3129.pdf>

[学会発表] (計5件)

①榎田登美男、Low energy spectral and scattering theory for relativistic

Schroedinger operators, Workshop “New developments in relativistic mechanics and applications” 平成24年8月1日、ケンブリッジ大学ニュートン研究所(イギリス)

②榎田登美男、磁場のディラック作用素の閾値エネルギーにおける固有関数と共鳴状態、日本数学会、平成24年3月29日、東京理科大学神楽坂キャンパス

③榎田登美男、Threshold eigenfunctions and resonances for some relativistic operators, Conference “Operator theory & boundary value problems” 平成23年5月27日、パリ大学オルセー校(フランス)

④榎田登美男、Threshold eigenfunctions and resonances for some quantum Hamiltonians, 第8回 AIMS International Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 平成22年5月25日、ドレスデン工科大学(ドイツ)

⑤榎田登美男、Eigenfunctions at the threshold energies of magnetic Dirac operators, 第7回 International ISAAC Congress, 平成21年7月14日、インペリアル・カレッジ(イギリス)

[その他]

ホームページ等

<http://www.sci.u-hyogo.ac.jp/material/math/umeda-j.html>

## 6. 研究組織

(1) 研究代表者

榎田 登美男 (UMEDA TOMIO)

兵庫県立大学・大学院物質理学研究科・教授

研究者番号：20160319

(2) 研究分担者

( )

研究者番号：

(3) 連携研究者

岩崎 千里 (IWASAKI CHISATO)

兵庫県立大学・大学院物質理学研究科・教授

研究者番号：30028261

保城 寿彦 (HOSHIRO TOSHIHIKO)  
兵庫県立大学・大学院物質理学研究科・教授  
研究者番号：40211544

藤家 雪朗 (FUJIE SETSURO)  
兵庫県立大学・大学院物質理学研究科・准教授  
(H22～：立命館大学・理工学部・教授)  
研究者番号：00238536