

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 4月20日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2012

課題番号：21540207

研究課題名（和文）調和写像理論の新展開

研究課題名（英文） New development of harmonic maps

研究代表者

浦川 肇 (URAKAWA HAJIME)

東北大学・国際教育院・教授

研究者番号：50022679

研究成果の概要（和文）：調和写像の拡張である2-調和写像理論が1986年に提起された。我々はこれに類似の2ヤング・ミルズ理論の概念を新たに提起し、その孤立定理、すなわち底空間のリッチ曲率が正のとき2ヤング・ミルズ接続の自乗ノルムがある定数以下ならばヤング・ミルズ接続に限ることを示した。さらに2-調和写像について、ターゲットが非正曲率の自乗可積分な調和写像でない2-調和写像の非存在、ターゲットがコンパクト・リー群や対称空間の場合の2-調和写像の特徴付けと分類・構成を行った。

研究成果の概要（英文）：In 1986, the concept of the bi-harmonic map which is an extension of harmonic maps was introduced. We raised the new notion of the bi-Yang-Mills field, which is an analog of the bi-harmonic map, and showed its isolation phenomena. That is, bi-Yang-Mills fields with some square-integral norm over compact manifolds with positive Ricci curvature must be Yang-Mills fields. We showed bi-harmonic maps which have a bounded square-integral norm must be harmonic if the target space has non-positive curvature. We classified all the bi-harmonic maps for cases where the target space is a compact Lie group or compact symmetric spaces.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	900,000	270,000	1,170,000
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
2011年度	800,000	240,000	1,040,000
2012年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：調和写像、2-調和写像、2-ヤング・ミルズ場、非正曲率、コンパクト・リー群

1. 研究開始当初の背景 世界の最先端の調和写像の研究者らが2-調和写像理論の研究を始めようとする勃興する時期にあり、世界に先駆けて研究を行う必要に迫られていた。

2. 研究の目的 従来の調和写像理論とヤング・ミルズ理論を新たな観点から見直し、世

界に先駆けて、新たな2-調和写像理論等を構築することを目指す。

3. 研究の方法 従来ある調和写像理論やヤング・ミルズ場の理論の基盤にある様々な手法を徹底的に見直し、新たに2-調和写像理論や2-ヤング・ミルズ理論の構築に合うよ

うに改良を加え、2-調和写像理論と2-ヤング・ミルズ理論の構築を行うことにあった。

4. 研究成果 世界に先駆けて、2-調和写像理論の新たな展開を行うことができ、それらの成果を2009年(伊)、2010年(ルーマニア)、2012年(ブルガリア)での国際研究集会の招待講演で発表した。それらの成果を国際ジャーナルに論文発表した。以下は、我々が研究成果の内容である。

・調和写像の自然な拡張である「2-調和写像がどのような場合に調和写像になるか」という問題は自然な問題であり、かつ重要である。我々は「完備リーマン多様体から非正曲率リーマン多様体への2-調和写像にエネルギー有限かつ2-エネルギー有限という附加条件があれば、それは調和なものに限る」という興味ある定理を得た。これは B. Y. Chen 予想の調和写像版であるということもでき、誰も予期しない興味ある結果である。

・調和写像から2-調和写像の概念を拡張したことの類似として、ヤング・ミルズ場から2-ヤング・ミルズ場の概念を得た。ヤング・ミルズ場が孤立していることの類比として、2-ヤング・ミルズ場もまた孤立しているという定理を得た。すなわち、底空間のリッチ曲率が正のとき、2-ヤング・ミルズ場の自乗ノルムがある定数以下であればそれらヤング・ミルズ場に限ること、従って底空間が4次元の時はインスタントン解に限ることを示した。

・コンパクト・リーマン多様体からコンパクト・リー群への2-調和写像の特徴づける定理を得た。このことを用いて、コンパクト・リー群への2-調和曲線を分類し、2次元領域からコンパクト・リー群への2-調和写像を完全に特徴付け分類する定理を得た。この場合には、非常に多くの調和写像ではない2-調和写像があることを示した教務ある結果である。

・上記の結果をコンパクト・対称空間への2-調和写像についても拡張する結果を得た。特に、球面や複素射影空間への調和写像ではない2-調和写像がたくさんあり、分類する結果も得た。

・一方、完備リーマン多様体から非正曲率リーマン多様体への自乗可積分な2-調和な部分多様体は常に調和、極小部分多様体に限る、という2-調和部分多様体の非存在定理を示した。この定理は B. Y. Chen の予想が正しいことを示したものであり、大きな成果である。

・非正曲率リーマン多様体内の余次元1のいわゆる超曲面の場合に、2-調和であればそれは調和である、今の場合は極小超曲面に限るという結果を得た。これは B. Y. Chen 予想が超曲面のときには正しいことを示した。

・ヤング・ミルズ場に関連する結果として、等質空間上の射影平坦接続や平坦接続の分類と特徴付けについて、表現論の言葉ですべてを完全に書き下すことが出来るという精緻な結果を得た。これは以前行った結果をさらに進展させたものである。特に、不変な射影平坦接続を許容する対称空間を完全に決定し、不変な平坦接続を許容する等質空間との対応関係を明らかにすることができた。また、今の場合には、これらの空間が不変なアフライン挿入を許容することも示した。

・2-調和写像や2-ヤング・ミルズ場は非線形の偏微分方程式の解となっている。これらのコンピュータ画像を得ることは大きな問題であるが、非常に難しい。我々は2階楕円型作用素であるラプラシアン²の2次元領域や3次元領域上の固有関数のコンピュータ画像を得ることができた。

・他方、対称性の高い領域上のラプラシアンの固有関数はその領域の対称性を用いて、厳密解を与えることができる。我々はリー代数に付随したユークリッド空間内の領域上のラプラシアンの固有関数の厳密解を完全に求めることができた。

・コンピュータを用いて数理モデルの解析を行うには、その計算時間のかからないソフトウェアの開発は極めて重要な問題である。このようなモデルの1つに数理物理で有名な「ボルツマン機械が勝手な入力をしたとき、どれくらいの時間で定常解に到達するか」という問題がある。我々は2009年の論文において、簡単なボルツマン機械の場合ではあるが、どんな入力にたいしても定常解に至る時間を厳密に評価することができた。

・ヤング・ミルズ場の数理モデルの類比として1994年に二人の物理学者サイバーグとウィッテンが導入したモデルがあり、サイバーグ・ウィッテン理論と呼ばれている。これは実4次元空間に特有の理論であった。我々は実6次元以上のコンパクト・ケーラー多様体上のサイバーグ・ウィッテン理論を実4次元ケーラー多様体上のサイバーグ・ウィッテン理論を含む形で拡張することができた。そのときの高次元サイバーグ・ウィッテン方程式の解全体の構造を明らかにすることにも成功した。この場合の解の構造も4次元サイバーグ・ウィッテン方程式の解の構造と同様にきれいな形になっていることが分かった。

・基本群が自明でないコンパクト・リーマン多様体場合には、基本群の表現に伴ってベクトル束上のラプラシアン付随する解析的振率が位相的な振率と一致するという結果が知られている。しかしながら、ほんのわずかしたその具体的な計算例は知られていない。我々はコンパクトな平坦多様体上の解析的な振率を計算し、それらが古典的なフル

ヴェイツのゼータ関数と関連があることを明らかにした。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 12 件)

1. H. Urakawa and N. Nakauchi, Biharmonic submanifolds in a Riemannian manifold with non-positive curvature, Results Math., Vol. 63 (2013), 467-474.
DOI 10.1007/s00025-011-0209-7.
2. H. Urakawa and N. Nakauchi, Biharmonic hypersurfaces in a Riemannian manifold with non-positive curvature, Ann. Global Anal. Geom., Vol. 40 (2013), 125-131.
DOI 10.1007/s10455-011-9249-1.
3. H. Urakawa, Biharmonic maps into compact Lie groups and symmetric spaces, Proceedings Amer. Institute Physics, Vol. 1329 (2011), 246-263.
DOI 10.1063/1.3546089.
4. H. Urakawa, The geometry of biharmonic maps, Contemporary Mathematics, Amer. Math. Soc., Vol. 542 (2011), 159-175.
5. H. Urakawa, and M. Jumonji, Computer visions for the eigenvalue problems of embedded surfaces and plane domains, Annal. Stiintifice Ale Universitaii "Al. I. Cuza" Din Iasi, Vol. 57 (2011), 125-136.
6. H. Urakawa, Projectively flat connections and flat connections on homogeneous spaces, Hokkaido Math. J., Vol. 39 (2010), 139-155.
7. H. Urakawa, T. Ichiyama and J. Inoguchi, Classifications and isolation phenomena of bi-harmonic maps and bi-Yang-Mills fields, Note di Matematica, Vol. 30 (2010), 15-48.
DOI 10.1285/i15900932v30n2p15
8. H. Urakawa and Y. Hosikawa, Affine Weyl groups and the boundary value eigenvalue problems of the Laplacian, Interdisciplinary Information Sciences, Vol. 16 (2010), 93-109.
DOI 10.4036/iis.2010.93.
9. H. Urakawa, T. Ichiyama and J. Inoguchi, Bi-harmonic maps and bi-Yang-Mills fields, Note di Matematica, Vol. 28 (2009), 233-275.
DOI 10.1285/i15900932v28n1supplp233.
10. H. Urakawa, Convergence rates to optimal distribution of the Boltzmann machine on simulated annealing, Interdisciplinary Information

Sciences, Vol. 15 (2009), 291-299.
DOI 10.4036/iis.2009.291

11. H. Urakawa, Compactness of the moduli space of solutions of the Seiberg-Witten equations over higher dimensional Kaehler manifolds, Publ. Math. Debrecen, Vol. 74 (2009), 433-480.
12. H. Urakawa and T. Sunada, Ray-Singer zeta functions for compact flat manifolds, Contemporary Math. Amer. Math. Soc., Vol. 484, (2009), 287-294.

[学会発表] (計 5 件)

1. H. Urakawa, Geometry of biharmonic maps-existence, non-existence and classification problems of proper biharmonic maps, The 3rd International Colloquium on Differential Geometry and its Related Topics, Veliko Tarnovo Univ., Bulgaria, September 5, 2012.
2. 浦川 肇, Biharmonic maps into a Riemannian manifold of non-positive curvature and B. Y. Chen's conjecture, 金沢大域解析研究会、2011年11月10日、金沢大学、
3. 浦川 肇, Biharmonic maps into a Riemannian manifold of non-positive curvature and B. Y. Chen's conjecture, 松江微分幾何研究会、2011年12月17日、島根大学
4. H. Urakawa, Biharmonic maps into compact Lie groups and symmetric spaces, The "Alexandru Myller" Mathematical Seminar Centennial Conference, Iasi University, Romania, 2010, June 25.
5. H. Urakawa, The geometry of biharmonic maps, A Harmonic Map Fest in honor of John C. Wood's 60th Birthday, Cagliari University, Italy, September 9, 2009.

[図書] (計 1 件)

1. 浦川 肇, 朝倉書店、ラプラスの幾何と有限要素法、2009年、272頁。
ISBN 978-4-254-11823-0

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計0件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

浦川 肇 (URAKAWA HAJIME)
東北大学・国際教育院・教授
研究者番号：50022679

(2) 研究分担者

一山 稔之 (ICHIYAMA TOSHIYUKI)
亜細亜大学・経済学部・教授
研究者番号：70213014

(3) 研究分担者

伊藤 仁一 (ITO H JINICHI)
熊本大学・教育学部・教授
研究者番号：20193493

(4) 研究分担者

尾畑 伸明 (OBATA NOBUAKI)
東北大学・大学院・情報科学研究科
研究者番号：10169360

(5) 連携研究者

井ノ口 順一 (INOBUCHI JUNICHI)
山形大学・理学部・准教授
研究者番号：40309886

(6) 連携研究者

日合 文雄 (HIAI FUMIO)
東北大学・大学院情報科学研究科・教授
研究者番号：30092571