

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年5月17日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2012

課題番号：21540208

研究課題名（和文） 自由確率論における不等式と変分原理の研究

研究課題名（英文） Study of inequalities and variational principle in free probability theory

研究代表者

日合 文雄 (HIAI FUMIO)

東北大学・大学院情報科学研究科・名誉教授

研究者番号：30092571

研究成果の概要（和文）：本研究では、自由確率論、量子確率論、作用素・行列解析の3つの路線から研究を行い、多方面にわたって成果を得た。自由確率論においては、自由エントロピーと自由フィッシャー情報量に関連する研究を行った。量子確率・量子情報の分野では、量子相対エントロピー、量子仮説検定、単調リーマン計量について研究した。また、行列解析の分野では、作用素単調・凸関数、行列のトレースおよびノルム関数、作用素平均と対称(反)ノルムなどに関連して種々の研究を行った。

研究成果の概要（英文）：In the course of this research project we obtained various results in the three subjects of free probability, quantum probability and operator/matrix analysis. We studied free probability theory related to free entropy and free Fisher information. In quantum probability and quantum information, our study was directed to quantum relative entropy, quantum hypothesis testing and monotone Riemannian metrics. Several results in matrix analysis were also obtained concerning operator monotone and convex functions, matrix trace and norm functions, operator means and symmetric (anti) norms, etc.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2010年度	900,000	270,000	1,170,000
2011年度	700,000	210,000	910,000
2012年度	700,000	210,000	910,000
年度			
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：関数解析学・作用素・行列解析・量子情報・自由確率論

1. 研究開始当初の背景

(1) D. Voiculescu が創始した自由確率論は

1990-2000年代を通し非常な発展を遂げた。

代表者の日合は多変数の非可換確率変数が

作る C^* -環の枠組で自由圧力を導入し、そのルジャンドル変換と多変数自由エントロピーとの関係を解明し 2005 年に発表した。これが自由確率論における統計力学的な変分原理を本格的に考察した最初である。日合-植田は 2008 年に射影作用素に対する自由エントロピーについて、ユニタリ軌道アプローチという新しい方法で成果を上げたので、この方法を一般の非可換確率変数に拡張し変分原理の観点から研究することを意図した。

(2) 自由確率論より以前から研究されてきた非可換確率論として量子確率論があり、それを基礎とする量子情報理論が 1995 年頃から爆発的に発展した。代表者は Petz (ハンガリー) と共著で 1991 年に量子 Stein の補題を証明し、量子情報の発展の先鞭をつけた。この研究状況から、自由確率論と量子情報を接合するような研究を一つの目標とした(しかし、この目標は必ずしも成功していない)。

(3) 自由確率論でも通常の量子確率論でも行列が重要な役割を果たす。自由確率論では非可換確率変数の近似モデルとしてランダム行列が使われるが、量子確率論では行列環そのものが理論の枠組みである。これらの数学的基礎である作用素・行列解析に固有の問題についても研究することを意図した。

2. 研究の目的

(1) 本研究の当初の目的は、非可換確率変数に対するランダム行列近似の方法を駆使して、エントロピーとフィッシャー情報量に関係する種々の不等式の自由確率アナロジー、およびエントロピーと圧力関数の間のルジャンドル変換に基づく変分原理の自由確率アナロジーを研究することであった。

(2) 研究にあたっては、(自由確率論を含む)非可換確率論、特に量子情報理論とその数学的基礎である作用素・行列解析に関する問題

について不等式の観点からの研究も意図した。

(3) 量子情報理論では、量子相対エントロピーを一般化した相対エントロピー的な種々の量を考察し、量子仮説検定や量子情報路容量の問題への応用を目指した。作用素・行列解析としては、作用素の平均と関連した作用素のノルム不等式や作用素単調関数・作用素凸関数についての研究を目指した。

3. 研究の方法

(1) 当初の最重要課題であった自由確率論における自由エントロピーと自由フィッシャー情報量に関する不等式と変分原理の研究では、連携研究者と植田氏(九大)と共同研究を行った。論文(18), (19)がその成果である。

(2) 2006 年 11 月から 2 年間外国人特別研究員として代表者が受け入れた Milan Mosonyi 氏(ハンガリー)とは、引き続き本研究機関を通して共同研究を行い、量子情報の分野で論文(8), (10), (14)の成果を得た。

(3) 2010 年 9~12 月と 2011 年 3 月~4 月にフランス CNRS 教授として、フランシェ・コムテ大学(ブザンソン)に赴任し、J.-C. Bourin 氏および U. Franz 氏と共同研究を行ったことは、本研究を進める上で非常に生産的であった。論文(4), (9)はその成果であり、他に投稿中の論文もある。

(4) 2010 年のブザンソン滞在中に 1 ヶ月半の間、ストックホルムの Mittag-Leffler 研究所で開催された Quantum Information Theory に関する研究プログラムに参加し、D. Petz 氏、M. Mosonyi 氏や M.B. Ruskai 氏(米)と議論できたことは有意義であった。論文(1), (3), (5), (6), (8)のアイデアはそのときに得られた。

4. 研究成果

- (1) 日合・幸崎・Petz・Ruskaiは、量子情報幾何で基本的な単調計量と関係して半直線上の作用素凸関数に対して定義される線形写像の完全正值性について、正定値関数の概念とフーリエ変換の技法を用いて研究した。
- (2) Audenaert・日合は、行列のベキ平均の間の不等式が成立するため必要十分条件を決定した。
- (3) 日合は、Wigner-Yanase-Dyson歪情報量の凸性問題に端を発した Lieb-安藤の凹凸性が最終的にどんな形まで拡張されるかを考察した。
- (4) Franz (仏) , Ricard (仏) との共同研究により、作用素・行列解析で有用な作用素単調・作用素凸関数の理論を高階の場合へ拡張し、関数カリキュラスの k 階微分の正值性と関連する k -調関数に対するいくつかの特徴づけを与えた。
- (5) 日合・Petz は、量子情報理論で重要な f -ダイバージェンス、単調計量、量子共分散、 χ^2 -ダイバージェンスなどの性質が、擬エントロピーを用いて統一的に導かれることを示した。
- (6) 日合・Petz は、正定値行列のなす多様体の上に、平均関数のベキで与えられる核関数によって定義されるリーマン計量について研究した。これらのリーマン計量の等距離構造を調べ、測地距離と測地最短線の収束性を考察した。
- (7) 日合・佐野は、 $(0, \infty)$ 上の関数に対する行列凸性と行列単調性を Loewner 行列の条件付き負定値性と条件付き正定値性により特徴づけた。有限区間 (a, b) 上の行列単調関数についても同様な特徴づけを与えた。
- (8) 日合・Mosonyi・Petz・Bény は、量子相対エントロピーや Rényi 相対エントロピーを含む量子 f -ダイバージェンスの劣確率写像

の下での単調性とその等号条件について研究した。そのために、 $(0, \infty)$ 上の作用素対数凸関数に対する新しく有用な積分表示を見つけた。

(9) Bourin・日合は、半正定値行列の (ユニタリ不変) 対称ノルムに関するいくつかの劣加法性を示すと同時に、反ノルムの概念を用いて、Minkowski の行列式不等式の拡張である優加法性を示した。

(10) Mosonyi・日合は、量子 α -相対エントロピーが一般化されたカットオフ・レートで表されることを示し、量子 α -相対エントロピーの直接的な操作的解釈を与えた。さらに α -相対エントロピーによって定義される Holevo 容量のいくつかの一般化について考察した。

(11) 安藤・日合は、 $(0, \infty)$ 上の作用素対数凸関数の概念を導入し、それが作用素単調減少関数と同値であることを示し、さらにそれと同値な作用素平均と関連するいくつかの性質を与えた。作用素対数凹関数についても同様に考察した。

(12) 日合は、作用素単調・凸関数、作用素平均、マジヨリゼーションなどの行列解析の話題についての講義録を出版した。

(13) Audenaert・日合・Petz は、関数計算による行列トレース関数に対する直和型の強劣加法性について考察した。

(14) 日合・Mosonyi・林は、近年発展が著しい量子仮説検定を研究し、量子スピン系上の相関がある並進不変な状態に対しても、Stein 型、Chernoff 型、Hoeffding 型の 3 つのタイプの漸近エラー限界を相対エントロピー的な量で記述できることを明らかにした。

(15) 日合は、実数区間上で定義された実数値関数について、行列の成分毎の関数計算が半正定値の順序で正、単調、凸になるための

特徴づけを与えた.

(16) 日合・Petz は, 正定値行列のなす多様体上に行列の種々の平均と関連して定義されるリーマン計量の測地距離や測地最短曲線を研究し, ユークリッド計量の引き戻しになるリーマン計量の特徴付けを与えた.

(17) Gibilisco・日合・Petz は, 量子共分散と量子フィッシャー情報量を用いた不確定性原理に関連した不等式をこれまでより簡単な方法で一般化した.

(18) 日合・宮本・植田は, ユニタリ軌道アプローチを用いて, 一般の多変数の非可換確率変数に対する軌道的自由エントロピー(次元)を定義し, 通常自由エントロピー(次元)と軌道的自由エントロピー(次元)の間に自然な関係式が成立することを示した.

(19) 日合・植田は, 2つの射影作用素の場合に, 相互自由フィッシャー情報量と自由エントロピーの間に対数ソボレフ不等式が成立することを示した.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 22 件)

(1) F. Hiai, H. Kosaki, D. Petz and M. B. Ruskai, Families of completely positive maps associated with monotone metrics, *Linear Algebra Appl.* (2013), to appear.

<http://www.journals.elsevier.com/linear-algebra-and-its-applications/>

(2) K. M. R. Audenaert and F. Hiai, On matrix inequalities between the power means: counterexamples, *Linear Algebra Appl.*, to appear.

<http://dx.doi.org/10.1016/j.laa.2013.04.012>

(3) F. Hiai, Concavity of certain matrix trace and norm functions, *Linear Algebra*

Appl., to appear.

<http://dx.doi.org/10.1016/j.laa.2013.04.020>

(4) U. Franz, F. Hiai and É. Ricard, Higher order extension of Löwner's theory: Operator k -tone functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, to appear.

http://www.ams.org/jourcgi/jrnln_toolbar_nav/tran_all

(5) F. Hiai and D. Petz, From quasi-entropy to various quantum information quantities, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 48 (2012), 525-542.

DOI: 10.2977/PRIMS/79

(6) F. Hiai and D. Petz, Riemannian metrics on positive definite matrices related to means. II, *Linear Algebra Appl.* 436 (2012), 2117-2136.

DOI:10.1016/j.laa.2011.10.029

(7) F. Hiai and T. Sano, Loewner matrices of matrix convex and monotone functions, *J. Math. Soc. Japan* 64 (2012), 343-364.

DOI: 10.2969/jmsj/06420343

(8) F. Hiai, M. Mosonyi, D. Petz and C. Bény, Quantum f -divergences and error correction, *Rev. Math. Phys.* 23 (2011), 691-747.

DOI: 10.1142/S0129055X11004412

(9) J.-C. Bourin and F. Hiai, Norm and anti-norm inequalities for positive semi-definite matrices, *Internat. J. Math.* 22 (2011), 1121-1138.

DOI: 10.1142/S0129167X1100715X

(10) M. Mosonyi and F. Hiai, On the quantum Rényi relative entropies and related capacity formulas, *IEEE Trans. Inform. Theory* 57 (2011), 2474-2487.

DOI: 10.1109/TIT.2011.2110050

(11) T. Ando and F. Hiai, Operator log-convex functions and operator means, *Math. Ann.* 350 (2011), 611-630.
DOI: 10.1007/s00208-010-0577-4

(12) F. Hiai, Matrix Analysis: Matrix Monotone Functions, Matrix Means, and Majorization (GSIS selected lectures), *Interdisciplinary Information Sciences* (2010), 139-248.
DOI: 10.4036/iis.2010.139

(13) K. Audenaert, F. Hiai and D. Petz, Strongly subadditive functions, *Acta Math. Hungar.* 128 (2010), 386-394.
DOI: 10.1007/s10474-010-9222-7

(14) F. Hiai, M. Mosonyi and M. Hayashi, Quantum hypothesis testing with group symmetry, *J. Math. Phys.* 50 (2009), 103304, 1-31.
DOI: 10.1063/1.3234186

(15) F. Hiai, Monotonicity for entrywise functions of matrices, *Linear Algebra Appl.* 431 (2009), 1125-1146.
DOI: 10.1016/j.laa.2009.04.001

(16) F. Hiai and D. Petz, Riemannian metrics on positive definite matrices related to means, *Linear Algebra Appl.* 430 (2009), 3105-3130.
DOI: 10.1016/j.laa.2009.01.025

(17) P. Gibilisco, F. Hiai and D. Petz, Quantum covariance, quantum Fisher information and the uncertainty principle, *IEEE Trans. Inform. Theory* 55 (2009), 439-443.
DOI: 10.1109/TIT.2008.2008142

(18) F. Hiai, T. Miyamoto and Y. Ueda, Orbital approach to microstate free entropy, *Internat. J. Math.* 20 (2009), 227-273.

DOI: 10.1142/S0129167X09005261

(19) F. Hiai and Y. Ueda, A log-Sobolev type inequality for free entropy of two projections, *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* 45 (2009), 239-249.

DOI: 10.1214/08-AIHP164

[学会発表] (計 15 件)

(1) F. Hiai, Concavity of certain matrix trace and norm functions, "Matrices and Operators", Conference in Honour of Sixtieth Birthday of Rajendra Bhatia, December 29, 2012, Indian Institute of Science, Bangalore, India.

(2) F. Hiai, Analytic functional calculus of operator convex/monotone functions, The 2012 KOTAC International Conference: Operator Theory and Its Applications, June 22, 2012, Chungbuk National University, Cheongju, Korea.

(3) F. Hiai, Convexity of quasi-entropy type functions: Lieb's and Ando's convexity theorems revisited, International Workshop on Anomalous Statistics, Generalized Entropies, and Information Geometry, March 10, 2012, Nara Women's University, Nara, Japan.

(4) 目合文雄, Toward the final version of Lieb-Ando concavity, 研究集会「スペクトル, 数域などの作用素の幾何的特性量を用いた作用素の構造研究」, 2011年11月15日, 数理解析研究所.

(5) 目合文雄, Higher order extension of Löwner's theory: Operator k -tone functions, 作用素論・作用素環論研究集会, 2011年11月4日, 琉球大学.

(6) F. Hiai, Jensen and Minkowski type inequalities for operator means (joint work with J.-C. Bourin), 14th Workshop

“Non-commutative Harmonic Analysis”, September 30, 2011, Bedlewo, Poland.

(7) F. Hiai, Free energy density in one-dimensional spin chains, Summer school on “Non-equilibrium statistical mechanics”, July 20, 2011, Centre de recherches mathématiques, Montréal, Canada.

(8) F. Hiai, Generalizing Minkowski’s determinantal inequality (joint work with J.-C. Bourin), International Conference “Product Systems and Independence in Quantum Dynamics”, March 14, 2011, Alfred Krupp Wissenschaftskolleg, Greifswald, Germany.

(9) F. Hiai, Convexity of quasi-entropy type functions: Lieb’s and Ando’s convexity theorems revisited, The 6th Jikji Workshop: Infinite Dimensional Analysis and Quantum Probability, January 10, 2011, National Institute for Mathematical Sciences, Daejeon, Korea.

(10) F. Hiai, Operator log-convexity and its applications, Program: Quantum Information Theory, October 26, 2010, Institut Mittag-Leffler, Djursholm, Sweden.

(11) F. Hiai, Riemannian metrics on positive definite matrices related to means (joint work with Dénes Petz), Information Geometry and its Applications III, August 4, 2010, Max Planck Institut, Leipzig, Germany.

(12) F. Hiai, Operator log-convex functions and operator means (joint work with T. Ando), the 16th Conference of the International Linear Algebra Society, June 22, 2010, Palazzo dei Congress, Pisa,

Italy.

(13) 日合文雄, 正定値行列の空間における平均と関連する Riemann 計量, 研究集会「作用素論における非可換解析学の展望」, 2009年10月29日, 数理解析研究所.

(14) F. Hiai, Riemannian metrics on positive definite matrices related to means (joint work with D. Petz), 12th Workshop “Non-commutative Harmonic Analysis”, August 21, 2009, Bedlewo, Poland.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

日合 文雄 (HIAI FUMIO)
東北大学・情報科学研究科・名誉教授
研究者番号：30092571

(3) 連携研究者

植田 好道 (UEDA YOSHIMICHI)
九州大学・大学院数理学研究院・准教授
研究者番号：00314724