

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 5月 9日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2011

課題番号：21540209

研究課題名（和文） ベーテ仮説の組合せ論と差分構造

研究課題名（英文） Combinatorics and difference structure in Bethe ansatz

研究代表者

国場 敦夫（KUNIBA ATSUO）

東京大学・大学院総合文化研究科・教授

研究者番号：70211886

研究成果の概要（和文）：多成分非対称排他過程のマルコフ行列のスペクトルの構造解明，量子可積分系の転送行列の満たす T-system, Y-system の拡張，周期性予想とダイログ予想の解決，周期箱玉系の分配関数のフェルミ公式の導出，高階ランク版の解，D型結晶基底に付随する一般化エネルギーの理論，3次元可解モデルによるスピン表現の量子R行列の導出を行った。

研究成果の概要（英文）：Structure of Markov matrix of multi-species ASEP is clarified. Generalizations, and solutions of periodicity /dilogarithm conjectures for T and Y-systems among transfer matrices in quantum integrable systems. Derivation of fermionic partition function of periodic box-ball system. Solution of higher-rank periodic box-ball system. Theory of generalized energies for D-type crystals is constructed. Derivation of quantum R-matrices for spin representations from 3D integrable system.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	800,000	240,000	1040,000
2010年度	700,000	210,000	910,000
2011年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総計	2,200,000	660,000	2,860,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：量子可積分系，ベーテ仮説

1. 研究開始当初の背景

(1) T-system, Y-system は量子アフィン・リー環に対してのみ定式化されていた。T-system の周期性は認識されておらず，クラスター代数による定式化は存在しなかった。また，Y-system の周期性と共形場理論に関係するダイログの和公式は，一部の場合を除いて予想であった。

(2) 箱玉系関連では，周期系の結果は sl_2 に限定され，また一般化エネルギーの理論は A

型の場合にしか存在しなかった。3次元可解モデル関連では，量子R行列と四面体方程式の解の関係として，後者のトレースをとるという簡約だけが知られており，A型に限定されていた。

2. 研究の目的

(1) T-system, Y-system を量子カツ・ムーディー代数の量子アフィン化のキロフ・レシェキン加群へ拡張する。また，クラスター代数を用いた定式化を行い，周期性予想と

ダイログ予想を解決する.

(2) 高階ランクの周期箱玉系を線形化し, 初期値問題の解を与える. またD型の結晶基底に付随する一般化エネルギーの理論を構築する.

3. 研究の方法

(1) 制限 T-system, Y-system をスペクトルパラメーターに関する漸化式と見なし, 適当な箝を用いてクラスター代数の変異と同定する. 周期性とダイログ予想を, クラスタ圏の理論とトロピカル Y-system の性質を用いて証明する.

(2) sl_2 の場合の周期箱玉系の解と, 組合せベータ仮説の考察を併せることにより, 高階ランクの周期箱玉系の解を与える. また, D型の一般化エネルギーはトロピカル R を構成するローラン多項式の超離散化を用いて定義し, パスにおける値を計算機で生成して超離散可積分系(D型箱玉系)の粒子・反粒子数との関係を予想し, 証明する.

4. 研究成果

(1) 1 次元多成分非対称排他過程の研究を行った. 定常状態への緩和を特徴づける動的臨界指数を決定し, 遷移率が非対称のときには Kardar-Parisi-Zhang 普遍性クラス, 対称のときは Edwards-Wilkinson 普遍性クラスの値になることを示した. さらに, マルコフ行列に対し, 諸種の粒子数セクターにおけるスペクトルの関係を調べた. スペクトルが呈する包含構造を発見し, それに準拠してセクターの集合に Poset 構造を導入した. Hasse 図は超立方体になるが, その対極点に位置する二つの粒子セクターにおけるマルコフ行列のスペクトルに双対性があることを証明した. この性質は対称な場合, 即ち $sl(n)$ ハイゼンベルグ模型でも知られていなかったものであり, その後自由境界条件の場合などへの拡張のもとになった. これらの成果をまとめた論文はイギリス物理学会誌 *Journal of Physics A* に出版され IOP Select に選ばれた.

(2) 量子可積分系の転送行列の満たす T-system, Y-system の拡張, 周期性予想とダイログ予想を解決した. どちらの予想もほぼ 20 年来の難問であったが, クラスタ代数, 圏という新しい手法により解決に至った意義は大きい. まず出発点となるのは, レベル制限を課した T-system, Y-system をスペクトルパラメーターについての発展方程式とみなし,

適当な箝を導入することにより, 付随するクラスター変数および係数の変異の合成が上記の発展方程式と一致するような設定を発見したことである.

クラスター圏の理論と F-多項式の議論等を用い, クラスタ変数, 係数はトロピカル Y-system により制御される事を示した. この事実により, 周期性予想とダイログ予想は共にトロピカル Y-変数に関する単純な命題に還元された. 後は変異におけるトロピカル Y-変数の挙動を詳しく追跡することにより証明が完結した.

(3) 周期箱玉系の分配関数のフェルミ公式を得た. 周期的でない場合には, ケロフ・キリロフ・レシエテキンによって 80 年代に得られていたフェルミ公式に箱玉系の準粒子描像を付与して精密化したものになることが, 我々の以前の研究により明らかにされていた. 今回はそれを周期系にまで拡張したことになる. その結果は $q=0$ におけるベータ根の数え上げからくる明示式の自然な q -類似となっている. ただし, この結果が他の表現や代数の場合へと拡張できる見通しはなく, 今のところ sl_2 の spin 1/2 表現の特殊性であるとしかねない. この結果をまとめた論文はイギリス物理学会誌 *Journal of Physics A* に出版され IOP Select に選ばれた.

高階ランク周期箱玉系についても成果を得た. sl_2 の場合と同様に, (幾つかの技術的な仮定の下に)組合せ論的なベータ仮説を用いて作用(保存量), 角変数を構成し, 時間発展を線形化した. 保存量はランク個のヤング図になる. 初期値問題を線形化により解決した. また時間発展による連結成分がトーラスの整数点集合になることを示し, 各等位集合に含まれるトーラスの多重度の明示式を得た. これらの結果を併せて, 等位集合に含まれる状態の明示式を得, $q=0$ におけるベータ根の数え上げ公式と一致する事を証明した. この結果はベータ根の数え上げ公式に, 高階ランク周期箱玉系の等位集合のトーラス分解という意味づけ, 準粒子描像をあたえるものである. 応用として, 任意の時間発展における基本周期の明示式を得, ベータ固有値との関係についても明らかにした. 更に与えられた作用・角変数から周期箱玉系の状態を回復するヤコビの逆問題の解として, 超離散リーマンテータ関数による明示式を得た. その際, 時間発展の隠れた変数として, いわゆる運搬車についても明示式を得た. 応用と

して、局所変数の時間平均を決定し、トロピカル周期行列と関係づけた。周期箱玉系の拡張として、ここまで一般的で広範な系を概念的に見通し良く組織的に扱い、上記の様な詳細で多岐にわたる結果を出したのは本研究が初めてであり、唯一である。

D型結晶基底に付随する一般化エネルギーの理論を得た。D型トロピカルRは幾何結晶の変数の有理式による明示式を持つが、そこに幾つもの構成単位となるローラン多項式が登場する。それらの超離散極限はアフィン・クリスタルの理論で重要なエネルギー関数を含み、その一連の拡張を与える。これら一般化エネルギーを、「D型箱玉系」の時間発展における粒子数と関係させる定理を得た。また、組合せベータ仮説におけるチャージ関数の変種が一般化エネルギーの明示式を与えるという予想を部分的に得た。これらはA型における我々の以前の結果をD型に拡張するものである。

以上の結果は査読付き国際学術誌、および国際会議報告集(査読付き)に掲載された。

- (4) 四面体方程式に対する Bazhanov らの解 S を 2次元簡約し、B型,D型,およびねじれD型のアフィン・リー環のスピンの量子R行列と一致することを証明した。四面体方程式の解は q -変形されたボソンのフォック空間とフェルミオンフォック空間 2 個の合計 3 個の空間のテンソル積に作用する。まずボソンの空間の中に二つのベクトル u, v を構成した。これらにより S の行列要素をとるとフェルミオンの自由度だけが残り、2 の n 乗次元の空間二つのテンソル積に作用する演算子となる。これがスピンの量子R行列と一致する事を、R行列を特徴づける量子群との可換性を確認する事により証明した。ベクトル u, v に 2 種類ある自由度は B型,D型,およびねじれD型の選択の自由度に対応する。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 8 件)

- ① R. Inoue, A. Kuniba, T. Takagi, Integrable structure of Box-ball system : crystal, Bethe ansatz, ultradiscretization and tropical geometry, J. Phys. A: Math. Theor. 45, 2012, 073001, 64pp

- ② A. Kuniba, T. Takagi, Fermionic partition functions for a periodic soliton cellular automaton, J. Phys. A: Math. Theor. 44, 2011, 135204, 22pp
- ③ A. Kuniba, T. Nakanishi, J. Suzuki, T-systems and Y-systems in integrable systems, J. Phys. A: Math. Theor. 44, 2011, 103001, 146pp
- ④ A. Kuniba, R. Sakamoto, Y. Yamada, Generalized energies and integrable $D^{(1)}_n$ cellular automaton, in "New Trends in Quantum Integrable Systems", eds. B. Feigin, M. Jimbo and M. Okado (World Scientific 2011), pp221-242
- ⑤ R. Inoue, O. Iyama, A. Kuniba, T. Nakanishi, J. Suzuki, Periodicities of T-systems and Y-systems, Nagoya Math. J. 197, 2010, pp.59-174
- ⑥ A. Kuniba, T. Takagi, Bethe ansatz, inverse scattering transform and tropical Riemann theta function in a periodic soliton cellular automaton for $A^{(1)}_n$, SIGMA 6, (2010), 013, 52pp
- ⑦ A. Kuniba, T. Nakanishi, J. Suzuki, T-systems and Y-systems for quantum affinizations of quantum Kac-Moody algebras, SIGMA 5, 2009, 108, 23pp
- ⑧ C. Arita, A. Kuniba, K. Sakai, T. Sawabe, Spectrum in multi-species asymmetric simple exclusion process on a ring, J. Phys. A: Math. Theor. 42, 2009, 345002 41pp

[学会発表] (計 5 件)

- ① 国場敦夫, 高木太一郎, Fermionic partition functions for a periodic soliton cellular automaton, 日本数学会, 2011年3月21日、早稲田大学西早稲田キャンパス
- ② 井上玲, 伊山修, B. Keller, 国場敦夫, 中西知樹, T and Y-systems, dilogarithm identities and cluster algebras: nonsimply laced case, 日本数学会, 2010年3月26日、慶応大学矢上キャンパス
- ③ 国場敦夫, 高木太一郎, $A^{(1)}_n$ 周期箱玉系の phase space の構造, 日本数学会, 2010年3月26日、慶応大学矢上キャンパス
- ④ 有田親史, 国場敦夫, 堺和光, 沢辺剛 「多成分排他過程の固有値に現れる双

対性」, 日本数学会, 2009年9月24日, 大阪大学豊中キャンパス

〔図書〕(計1件)

「ペーテ仮説と組合せ論」朝倉書店 2011, 220p, 国場敦夫著

6. 研究組織

(1) 研究代表者

国場 敦夫 (KUNIBA ATSUO)

東京大学・大学院総合文化研究科・教授

研究者番号: 70211886

(2) 研究分担者

()

研究者番号:

(3) 連携研究者

山田泰彦 (YAMADA YASUHIKO)

神戸大学・理学部・教授

研究者番号: 00202383

中西知樹 (NAKANISHI TOMOKI)

名古屋大学・多元数理研究科・准教授

研究者番号: 80227842