

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年5月31日現在

機関番号：17401

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2011

課題番号：21540222

研究課題名（和文）調和写像流に対する正則性条件と特異性の漸近解析

研究課題名（英文）A regularity criterion for the harmonic map flows
and asymptotic analysis for singularity

研究代表者

三沢 正史（MISAWA MASASHI）

熊本大学・大学院自然科学研究科・教授

研究者番号：40242672

研究成果の概要（和文）：幾何学，物理学に現れる，調和写像に関するエネルギー最小化問題を研究した．とくに，エネルギー最急降下曲線である調和写像の時間発展，調和写像流，の解の時間大域的存在と解の滑らかさ（連続性，微分可能性）について研究した．空間 2 次元の調和写像流の弱解（数学的な抽象解，超関数の意味の解）の正則性条件を改良した．調和写像の一般化である p 調和写像について，その時間発展である p 調和写像流の弱解の正則性条件の改良を研究した．調和写像に対応する波動方程式である波動写像に関連して，消散型波動方程式の弱解の時間大域存在を証明した．

研究成果の概要（英文）：I consider the evolution of the harmonic maps, called the harmonic map flows. In particular, I study the global existence and regularity of weak solutions of the harmonic map flows. I improve the regularity criterion for weak solutions and show the global existence of the dissipative wave equations, with applications to the wave maps.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009 年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2010 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2011 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学，数学，大域解析学，実解析学，関数解析学

科研費の分科・細目：数学，大域解析学

キーワード：調和写像，調和写像流，変分問題，弱解，大域存在，正則性，特異性

1. 研究開始当初の背景

(1)(背景) 滑らかな m 次元有界領域からユークリッド空間の滑らかなコンパクトリーマン(部分)多様体への写像に対して，エネルギー（一階導関数の 2 乗積分）を考え，その臨界点である（エネルギーの Euler-Lagrange 方程式の解として定まる）調和写像について研究した．これは調和関数の自然な一般化である．調和写像を規定する調和写像方程式は，写像先多様体のベクトル束上の調和方程式

（Laplace 方程式）であり，写像先多様体の第 2 基本量をもつ非線形楕円型方程式系であるので，一般的に滑らかな解をもつとは限らない．変分学の直説法により Dirichlet 境界条件のもとでエネルギー最小化関数の存在とその部分的正則性を証明することができる（R. Schoen と K. Uhlenbeck, M. Giaquinta と E. Giusti の結果）また，定義域が 2 次元の場合には，調和写像の弱解（超関数の意味の解）は滑らかであることが証明されている

(F. Hélein の結果). これら基本的に重要な結果がある一方で, エネルギー最小化関数でない臨界関数, 一般の調和写像の弱解の存在と, 定義域が高次元の場合のその正則性については未解決のままであった.

(2)(動機) そこで, 本研究では, 調和写像の一般の弱解の存在とその正則性を調べるために, エネルギーに対する勾配流, 調和写像流, の弱解の時間大域存在とその正則性特異性を研究する. 調和写像流は, エネルギーの最急降下曲線であるので, 時間大域解の時間無限大極限関数は調和写像になる. これが最初に J. Eells と J. H. Sampson が調和写像流を考えた所以であった.

2. 研究の目的

任意の初期値に対する調和写像流の弱解の大域存在と正則性(詳しくは, 部分的正則性)については, M. Struwe(空間 2 次元の場合, 空間高次元の場合は Y. Chen と M. Struwe の結果)によって証明され, 調和写像流における基本定理となった(境界値問題については, K.-C. Chang, Y.-M. Chen と F. H. Lin の結果) この結果では, 弱解の滑らかでない点, 特異点, の集合の(Hausdorff 測度の意味の)大きさが評価されている. また, 任意の初期値に対しては, 滑らかな解が時間局所的に一意に存在する一方, ある初期値に対しては, 有限時間で滑らかな解の特異性が実際に起こる(空間 2 次元の場合には, R. Ye の結果, 空間高次元については, Y.-M. Chen と W.-Y. Ding の結果). 空間 2 次元の場合には, Struwe の構成した弱解は一意であることもわかっている(A. Freier の結果). 本研究では, 調和写像流の弱解の特異点周りの漸近挙動を解析する. 調和写像流の特異性については, W.-Y. Ding, G. Tian, F. H. Lin および P. Topping らによる一連の結果がある. 本研究の目的は, これら結果を精密化して, 調和写像流の弱解の特異点周りの漸近挙動について, 以下の問題を研究することである:

- (1) 弱解の正則性条件の改良
- (2) 有限および無限特異時間における解の漸近挙動の解析
- (3) 有限および無限特異時間におけるエネルギー集中現象の解析

正則性定理により, あるスケールエネルギーがある閾値より小さいとき, 調和写像流の解は滑らかである. したがって, 特異時間近くでは, スケールエネルギーは閾値より大きくなり. 特異点周りでスケール変換された解の族は, 写像先多様体への調和球面(bubble)にエネルギー空間で強収束する(エネルギー

集中現象). 特異時間でのエネルギー損失は, この bubble のエネルギーの総和に等しい(エネルギー量子化). 本研究では, 特異時間におけるエネルギー集中が, スケール変数のどのような関数として定まるか調べたい. また, スケール変換された解の族が, 調和球面にスケール変数のどのようなオーダーで収束するのか, 漸近解析によって調べたい.

弱解の正則性条件の改良は, 解に沿って動く写像先多様体の接ベクトル速において熱作用素の正則性評価を迫及することによって行われる. このためには, 解に最適に付随する, 接ベクトル束上の動標構(Coulomb moving frame)を使って調和写像流のある行列式構造を見出し(F. Hélein の方法), 非線形項の正則性を改善する(Hardy 空間の正則性). 調和写像流の Hardy 空間による正則性を実解析的に迫及すると正則性条件の改良が得られると期待している.

エネルギー集中現象におけるエネルギー量子化はすでに知られた結果であるが, その証明には不明瞭な部分が見られる. 本研究では, 明確な証明をあたえるために, 熱作用素の時間逆ムキの一意性を利用する. この方法は, G. Seregin, V. Šverák らによって空間 3 次元 Navier-Stokes 方程式の臨界正則性を証明するために使われたものであり, スケール変換された解の部分列収束を全体収束に改良するために本質的役割を果たすと期待している.

調和写像流の特異性は, 調和写像流のエネルギー空間(Sobolev 空間)におけるエネルギーの勾配流としての大域挙動を特徴つけるのであり, 多様体に値をもつ Sobolev 写像の集合のモース理論的研究において基本的役割を果たすものと期待される.

3. 研究の方法

(1) 調和写像流の弱解の正則性条件の改良. 解の積分の意味での平均振動がある閾値より小さいとき, 弱解は滑らかである, ことを証明する. このために, 臨界の関数空間である Hardy 空間と有界平均振動空間の共役性, とくにそれを意味する Fefferman-Stein の不等式を局所領域上で証明する必要がある.

(2) 空間高次元の場合に調和写像流の正則性条件の改良. 解の積分の意味での平均振動のスケール変数に関する単調非増加性を証明する. 多少の誤差つきで構わない. 逆 Poincaré 不等式を組み立て, これにスケールエネルギーの単調性公式(M. Struwe の結果)を適用する. これら評価の応用として, 初期値(境界値)の平均振動ノルムが小さい場合に, 滑らかな解が時間大域的に存在することを証明する.

(3)特異時間における解の漸近挙動. (1)のように弱解の正則性条件が改良されると, 解の特異性の発生の状況が精密化される. スケール変換された解の族の収束するオーダーが多項式オーダーより \log オーダー分早くなることが予想される (blow up 解析の精密化). これは, 自己相似的な特異性は発生しないことを意味する.

(4)エネルギー量子化の明確な証明. 特異性はエネルギー損失によって起こる. この特異点付近でのエネルギー損失を正確に計算したい. このために, 調和写像流に対する時間後ろ向きの一意性を証明する. 同様の方法は, 非圧縮流体非定常空間3次元運動を記述する Navier-Stokes 方程式に対する臨界正則性条件を証明するために利用された.

(5)関連する国内外の偏微分方程式, 実解析, 関数解析関係の研究集会, セミナーに参加し, 必要な情報を収集し, それらに基づき定期的に学内セミナーを開いて連携研究者との研究打ち合わせを行う.

4. 研究成果

(1)(弱解の正則性条件の改良) 弱解の積分の意味での平均振動がある閾値より小さいとき, 弱解は滑らかである(口頭発表). ただし, この平均振動ノルムの時空のスケールが最良でない. 一方, スケールの同じ一階導関数の積分が小さいという条件で弱解の滑らかさが証明されていた(C. Y. Wang ノ結果). 平均振動ノルムはスケールのにはこれと同じだが, 解の微分を使っていないので, 正則性としては弱い条件である, したがって, よい正則性条件である.

(2)(消散型波動写像の大域存在) 調和写像の波動版である波動写像に関連して, 消散型非線形波動方程式の弱解の時間大域存在を証明した(主な発表論文). このために, 消散型波動方程式に対して, エネルギー減衰評価を証明した. 初期値の空間を Hardy 空間として証明し, 既存の結果を改良した. 調和写像流とは直接は関係ないが, 調和写像の安定性に応用がある.

(3)(高次元調和写像流の大域存在) 調和写像の高次元版である, m 調和写像流の初期値境界値問題について, エネルギーデータに対して弱解の時間大域存在を証明した(主な発表論文). 今までの結果では, 境界なしのコンパクト多様体, および自由境界条件のもとでのみ証明されていたが, Dirichlet 境界条件のもとで, 弱解の大域存在を証明した.

(4)(p 調和写像流の正則性条件) 調和写像流の自然な一般化である p 調和写像流について, 弱解の正則性条件について研究した. このために, 時間発展 p 調和作用素 ($p = 2$ のとき熱作用素) に対する正則性が成り立つための, 外力, 低階項の最良の可積分条件を与えた(論文準備中, 口頭発表). この結果は, p 調和写像流の最良の正則性条件の構築に応用できる.

(5)(リーマン距離に関する等角変換に関する変分問題の解, symphonic map, の存在と正則性) 調和写像と関係する等角写像に関する変分問題について研究した. これは弾性体の変形問題にも直接関係する. この解を symphonic map と呼ぶ(共同研究者, 中内伸光氏(山口大理学部教授)による). ユークリッド空間の場合に弱解の存在とそのヘルダー連続性を証明した(論文準備中). 解を規定する偏微分方程式(対応する変分問題の Euler-Lagrange 方程式)は, p 調和作用素と関連するが代数的に異なる一方, 調和作用素の自然な高次元化とも見なせ, 純粋に正則性評価の立場からもたいへん興味がある.

(6)(国内研究集会, 研究セミナーの開催)

① 熊本大学数学教室において, 毎年 5 月-7 月, 9 月-3 月の期間, 毎月 1 回, 関係研究者 2 名を招聘して研究セミナーを開催した. 必要な場合には, 当科学研究費から旅費を援助した. 当研究課題の解決に有効な方法, 理論について関係研究者と研究打ち合わせ, 情報交換を行うことができた.

② 研究代表者三沢は, 数理解析研究所において, 当科学研究費配分期間中, 毎年 6 月に 3-4 日の国際研究集会を開催した. 必要な場合には, 当科学研究費から講演者の旅費を援助した. とくに海外研究者の旅費, 滞在費を援助した.

以上の研究セミナー, 研究集会の開催により, 当研究課題に関係する数学的方法, 理論の収集が可能となり, また, 関係研究者との共同研究になりうる新たな課題も得ることができた.

(7)(国際共同研究)

① 2009 年度, イタリア, ナポリ大学, パルマ大学の研究者との共同研究. 2009 年 8 月 30 日-9 月 14 日の期間, イタリア, ピサ高等研究所とナポリ大学数学科に研究滞在し, 関係研究者と研究打ち合わせ, 研究討論を行った, とくに, パルマ大学数学の G. R. Mingione 教授, ナポリ大学数学の N. Fusco 教授との研究セミナーを行い, このときの議論をもとに当科学研究費の研究課題に関連する研究成果が得られ(主な発表論文),

現在も、高次元調和写像の正則性について共同研究を行っている。当研究費以前に採択配分された科学研究費（基盤研究(C)(2007-2008)、課題番号 19540221)によって、2008年10月18日-11月1日の期間、日本、熊本へ初めて招聘し、このときの研究討議が発端となっていた。

② ①のイタリア、ピサ高等研究所を研究滞在の際、フィンランド・Aalto 大学数学 J. Kinnunen 教授と研究討議を行った。これが発端となり、2010年6月4日-6月13日の期間、研究代表者三沢が主催する京都大学数理解析研究所研究集会に当科学研究費によって招聘し、研究発表を行い、研究打ち合わせを行った。また、このときの議論が発展し、次いで同年11月24日-12月8日の期間、当科学研究費で再度招聘し、熊本大学での研究集会での発表、研究打ち合わせを行い、関係研究者との研究討議を行った。現在、 p 調和作用素の正則性とくに Harnack の不等式について共同研究を行っている。

③ 2011年9月10日-9月25日の期間、イタリア、ナポリ大学数学 N. Fusco 教授を熊本大学、九州大学に当科学研究費によって招聘し、研究代表者三沢が組織委員として開催した国際研究集会本会議で研究発表、研究打ち合わせを行った。この際、論文の review をしてもらい、国際雑誌への投稿の推薦を受けた(研究成果(4))。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 2 件)

- ① C. Leone, M. Misawa, A. Verde, A global existence result for the heat flow of higher dimensional H-systems, J. Math. Pures Appl., 97 巻, 2011, 282-294, 査読有
- ② T. Kobayashi, M. Misawa, S. Okamura, Decay property for the linear wave equations in two dimensional exterior domains, Differential and Integral Equations, 24 巻, 2011, 941-964, 査読有

[学会発表] (計 9 件)

- ① Masashi Misawa, A Hölder estimate for evolutionary p -Laplacian systems and its application, 第4回名古屋微分方程式研究集会, 2012.3.6., 名古屋大学 (nagoya) (杉本充教授による招待講演)
- ② 三沢正史, p 調和型非線形放物型方程式

系に対するヘルダー評価とその幾何学的偏微分方程式への応用, 2012.1.21, 愛媛大学「解析セミナー」(内藤雄基教授による招待講演)

- ③ Masashi Misawa, A Hölder regularity for nonlinear parabolic systems of p -Laplacian type, 2011.12.8, Department of Mathematics, Aalto University (Helsinki, Finland) (Juha Kinnunen 教授による招待講演)
- ④ 三沢正史 ある退化放物型方程式系に対するヘルダー評価について, 大阪大学微分方程式セミナー, 2010.12.10, 大阪大学大学院理学研究科(大阪) (鈴木貴教授による招待講演)
- ⑤ 三沢正史, 時間発展 p 調和方程式系に対する正則性評価について, 九州工業大学数学教室, 2010.11.13
- ⑥ Masashi Misawa, A refined Hölder estimate for the evolutionary p -Laplacian systems, 2010.10.16., 成均館大学数学科 (韓国, 水原) (Kyungkeun Kang 教授の招待講演)
- ⑦ 三沢正史, p 調和型方程式系に対するあるヘルダー評価について, 2010.6.26, 「奈良における偏微分方程式研究集会」(奈良女子大学数学科, 柳沢卓准教授による招待講演)
- ⑧ Masashi Misawa, Regularity by small BMO for the harmonic map flows, 2009.9.10, Department of Napoli University (Napoli, Italy) (Nicola Fusco 教授による招待講演)
- ⑨ 三沢正史, 調和写像流に対する正則性条件の改良について, 2009.6.24, 埼玉大学数学科談話会

6. 研究組織

(1) 研究代表者

三沢 正史 (MISAWA MASASHI)

熊本大学・大学院自然科学研究科・教授
研究者番号: 40242672

(2) 研究分担者 なし
()

研究者番号:

(3) 連携研究者

利根川 吉廣 (TONEGAWA YOSHIHIRO)
北海道大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 80296748

山浦 義彦 (YAMAURA YOSHIHIKO)
日本大学・文理学部・教授
研究者番号：90255597