様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２４年　６月　８日現在

機関番号：８２１１８
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2009～2011
課題番号：２１５４０２８６
研究課題名（和文）　ＱＣＤ解析のためのループ積分法の開発

研究課題名（英文）　Method of Loop Integration for QCD Analysis

研究代表者
金子　敏明（KANEKO TOSHIAKI）
大学共同利用機関法人高エネルギー加速器研究機構・計算科学センター・教授
研究者番号：40177522

研究成果の概要（和文）：一般的な質量の組み合わせ、時空 d 次元の 1 loop 2, 3 点関数を Lauricella の FD 超幾何関数で表した。4 点関数は青本-Gelfand 型の超幾何関数で表すことができる。また、一般の loop 積分の sector decomposition の効率的なアルゴリズムを開発した。

研究成果の概要（英文）：One loop two and three point functions are expressed in terms of Lauricella FD hypergeometric function in d-dimensional space-time with any combinations of particle masses.　Four point functions are expressed by Aomoto-Gelfand Hypergeometric functions.　An efficient algorithm has been developed in sector decomposition method for general loop integrations.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００９年度	1,100,000	330,000	1,430,000
２０１０年度	1,000,000	300,000	1,300,000
２０１１年度	1,000,000	300,000	1,300,000
総　計	3,100,000	930,000	4,030,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：物理学、素粒子・原子核・宇宙線・宇宙物理
キーワード：素粒子（理論）

１．研究開始当初の背景

(1) 近年の高エネルギー実験では大量かつ精密な測定がなされている。これらのデータを解析し、新たな物理的な意味を引き出すためには、理論的に既知の量を分離する必要がある。そのとき、期待される事実に対応する理論計算のみならず、バックグラウンドとなる大量の物理過程についても要求精度にあった理論的結果を求めることなしには、新たな物理的事実は引き出せない。
　通常、こうした計算のうち摂動論に基づくものは良く知られた手順によりなされる。しかしながら、生成粒子を増やす場合や摂動の次数を増やした場合には、それぞれ１段進めるごとに計算量は通常 1 桁程度づつ増えていく。現実に求める必要のある結果を得るためには、もはや手計算により可能な範囲を越えた計算量が必要となっている。こうして計算機の新たな利用法の追求は実験データ解析のための重要な要素となっている。
　こうした理論計算と実験データとを比較するためには、実験装置の複雑な構造を考慮した解析の必要がある。そのために理論値としての微分断面積の値のみならず、物理反応を理論的結果にあわせてシミュレートする、

イベントジェネレータと呼ばれるソフトウェアが必要とされる。イベントジェネレータにより発生した擬似的実験データは、測定器シミュレータに与えられ、実際に観測された実験データと同じ方法で解析され、既知の物理量が分離さる。その後に初めて新事実としての物理量を取り出すことができる。大規模な国際的実験プロジェクトが実施される場合には、各国の理論家によりそれぞれのイベントジェネレータの開発が行われ、対応する反応の種類、精度、計算速度において鎬が削られることになる。

摂動論に基づく計算は、計算手続きが明確であるためそれに従えばただちに計算結果が得られると考えられがちであるが、上にあげた量的な問題以外にもさまざまな問題が起こっている。高次補正についての解析法、特に多重 loop 積分の解析的結果が特殊な場合を除いて知られていないことはその最大のものである。また 1 loop 以下の場合でも、しばしば数値計算において数値的不安定性が見られ、要求される精度の結果が得られないことがある。これは単に計算機利用上の技術的な問題ではなく、散乱振幅の解析的性質と密接に結び付いている場合が多い。散乱振幅の解析的な性質を具体的な散乱過程において精査し、それを数値計算に反映する必要がある。これにより信頼性のある、安定した自動計算の結果を得ることができる。

(2) 現在 CERN 行われつつある LHC 実験では QCD 反応が主要となる。QCD 反応の解析では、相互作用が強く高エネルギー領域でのみ摂動論が意味を持つため、実験データと比較するためには、低エネルギー領域での現象論的データやモデルと組合せる必要がある。そのためには d 次
元法による赤外発散の除去行う必要があり、弱電磁理論の場合とは異なる手法が要求される。また結合定数の値が大きいため、摂動の高次補正の寄与が大きく高次 loop 積分の結果が要求されている。

(3) これに対し、理論家からはさまざまな条件下での積分結果に関する研究結果が得られているが十分ではない。直接積分する以外に比較的簡単な積分へ帰着させる代数的方法や、質量や運動量に関するパラメータに関数として微分方程式を求める方法、純粋なまたは解析的方法と組み合わせる数値解析的方法などが開発されてきた。これらの関数の難しさは、積分結果が全ての物理的性質を備えるはずであり、その物理的振舞が複雑であることに起因している。解析的な振舞を調べる方法も古くから行われてきており、それらの成果も重要となっている。

２．研究の目的

(1) 1 loop 積分の解析的性質をより明確にする。より具体的には、
①任意の時空の次元と、任意の粒子の組み合わせに対して適用できる loop 積分の解析的な表現を求めること。
②この表現は、極めて一般的に拡張されたな多変数の GKZ 超幾何関数により表されるが、より特殊かつ具体的な超幾何関数な表現を求めること。
③これらの表現から数値計算可能な表現を求めること、である。

(2) QCD の loop 積分では、多くの粒子は質量がないものとして扱われる。これに伴って赤外発散が発生する。この発散を分離するために Sector Decomposition の方法が知られている。この方法の効率化を行う。

(3) 高次の loop 多重積分の計算手法を追求する。

３．研究の方法

基本的には手計算により行った。得られた結果は、数式処理システム上のプログラムを作成し、結果の検証を行った。また、計算方法に対応する数値計算プログラムを開発し、結果の検証および性能の測定を行った。

４．研究成果

(1) 1 loop 積分には、反応する粒子の数に応じて n 点関数を値が求める必要がある。しかしながら、5 点関数以上は紫外発散がないため、次元正規化の必要はなく 4 次元時空での値が求まればよい。4 次元時空では、これらは 4 点関数以下の積分によってあらわされるため、4 点関数以下のループ積分が求まればよい。このため、ここでは 4 点関数以下だけを扱う。

反応する粒子や前提とする模型に合わせて、内線を様々な粒子が流れることになる。ループ積分はこれらの粒子のスピンおよび質量により異なる積分を行う必要がある。最も単純な積分は、スカラー積分と呼ばれる。粒子のスピンの組み合わせによっては、テンソル積分と呼ばれるより複雑な積分が登場する。また、粒子の質量の組み合わせによっては、赤外発散や閾値での振る舞いが異なることになる。これらを扱うため、通常の計算では、質量の組み合わせに条件を設け、それぞれの場合に応じてスカラー積分およびテンソル積分について計算が個別に行われてぉた。また、紫外発散や紫外発散の分離が必要となる場合､時空の次元を 4 次元から d 次

元に拡張して計算される。
　しかしながら、粒子の質量をパラメータ変数として一般的に積分が求まれば、テンソル積分はスカラー積分の微分として得ることができるなど、loop 積分が粒子の質量、反応粒子の運動量および時空の次元を変数とし扱うことができれば、関連する様々な積分やそれらの性質を統一的に理解し、扱うことができる。また、積分結果の解析的性質がわかれば、数値的不安定性を避けるための指針が与えられると、考えられる。このため、一般的な条件下で loop 積分を求めることが望ましい。また、この結果を個々の場合に適用することにより、数値計算が可能な表現を求めることも重要である。これにより、数値的不安定性を回避する統一的ライブラリの開発が可能となる。
① 一般的な 1 loop 2 点スカラー積分は、自然に Appell の F1 関数で表されることがわかる。この関数は Gauss の超幾何関数 F を 2 変数に拡張したもののうちの 1 つで、複数のパラメータを持つが、この場合そのパラメータは時空の次元に依存し、特別の組み合わせの形で登場する。また、粒子の質量や運動量はこの関数の引数に現れる。また F1 で表現されたことにより、1 loop 2 点関数が満たすべき微分方程式、冪級数形、解析的性質、種々の恒等式などが得られる。また、これにより時空 4 次元近傍での展開式、赤外発散部分の分離等ができ、対応する数値計算のための表式も得られる。
② 一般的な 1 loop 3 点スカラー積分は、上記 F1 をさらに n 変数に拡張した Lauricella の FD 関数であらせることが判明した。2 点関数の場合と同様、これにより 3 点関数の場合も種々の性質が成り立つことがわかった。また、時空 4 次元近傍での展開により数値計算可能な関数で表すことができる。
③ 一般的な 1 loop 4 点スカラー積分は、上記 FD をさらに拡張した、青本-Gelfand 形の超幾何関数で表すことができることがわかった。これは、内線の質量のいくつかが 0 である場合には、FD あるいはさらに F に帰着できる。また、時空 4 次元近傍での展開により FD ないしは数値計算可能な関数で表すことができる。また、質量が 0 になる粒子の組み合わせに対応する通常の結果は、連続的に他の場合と接続されるとは限らない。これらの不連続性についても統一的な理解が得られた。
④ 特に摂動論的 QCD においては、粒子の質量が 0 となる場合が多い。この場合赤外発散が現れ、それらを分離することが必要である。これらについては、4 階までのテンソル積分を求める数値計算パッケージを開発した。その結果は既存のパッケージと整合的である。これについては、関数の解析的性質の情報を利用することにより、より数値的に安定な結果が得られると期待できる。たとえば、積分結果は対数関数や二重対数関数等の数値計算可能な関数の組み合わせにより表現するのが通常の方法であるが、このような表現をとることにより、特定の点の近傍で大きな打ち消しあいが発生することがわかった。この場合には、超幾何関数の段階で別の表現を選ぶことにより回避できる。
　これらの結果は論文④、学会発表①、②、③で公表した。

(2) 高次 loop 積分では解析的に積分する方法が知られていない場合が多く、数値計算によりこれらを求める様々な方法が提案されている。赤外発散等の特異点がある場合にはそれを取り除かなければ数値積分は困難である。この赤外発散の分離のため、Sector Decomposition の方法が有効であることが知られている。この方法では、積分領域を変数変換をしながら分割を繰り返し、それぞれの分割された領域ごとに赤外発散を分離し、数値積分が行われる。これらの数値積分は、粒子の持つ運動量毎に計算される必要があるので、分割された Sector 数が少ないほど効率が良いことになる。
　最初に提示された Sector Decomposition の方法では、場合によっては無限回の繰り返しに陥ることが知られている。これに対し、別の著者により必ず完了するアルゴリズムが提案されたが、分割 Sector が通常最初の方法を大きく超えることがわかっていた。
　今回の研究では、赤外発散が起こる点付近での被積分関数の漸近的振る舞いを見ることにより、この問題が解決することがわかった。変数変換と領域分割をする必要はなく、単純な基準により積分領域を複数の多面体に分割すればよいこと、それは計算幾何学のアルゴリズムを適用することにより実行できることを示した。さらに、分割 sector 数を減少させるためには、多面体を少ない単体に分割できればよいことがわかった。最良の単体分割法は知られてはいないが、有効なアルゴリズムを提案した。これによりこれまで提案されてきた最少の分割 Sector 数を導くことを示した。
　これに関しては、論文①、②、③および学会発表④で公表した。

(3) 高次 loop 積分は、多変数多項式の実数冪乗を被積分関数とする多次元積分である。これらは一般に、極めて広範に定義される GKZ 超幾何関数で表されると考えられる。この関数に対しては、積分表示、微分方程式系、冪級数形が知られているが、与えられたパラメータの値に対する数値的な値を求める方

法は知られていない。
一方多変数多項式の実数冪乗に関しては、佐藤-Bernstein の b 関数および P 演算子を求めることができれば、部分積分の方法により、より発散の次数の低い積分と、積分の次元が低い表面項とで表すことができ、loop 積分をより簡単な積分に置き換えることができると予想される。
b 関数および P 演算子を求める一般的な方法として大阿久のアルゴリズムを使うことができる。これを数式処理システム上に実装し、2 loop 2 点関数に適用した。その結果いくつかの場合について b 関数および P 演算子を求めることができた。しかしながら、パラメータとして小さな整数を取る場合を除いて計算が困難であること、ファインマン図によっては P 演算子の表式が巨大ことのため、実用的なループ積分の値を求めることは困難であることが判明した。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 4 件）
① T. Kaneko and T. Ueda, ``Sector Decomposition Via Computational Geometry'', 査読なし, Proceedings of Science ACAT2010 (2011) 082.
② T. Kaneko and T. Ueda, ``A Geometric method of sector decomposition'', 査読あり, Computer Physics Communications 181 (2010) 1352-1361.
③ T. Ueda and T. Kaneko, ``A geometric approach to sector decomposition'', 査読なし, Proceedings of Science, CPP2010 (2010) 015.
④ T. Kaneko, ``Numerical calculation of one-loop integration with hypergeometric functions'', 査読なし, Proceedings of Science, CPP2010 (2010) 010.

〔学会発表〕（計 4 件）
① T. Kaneko, ``One-loop Integrations with Hypergeometric Functions'', Mini-workshop on method and automatic tool in perturbative calculation of Quantum Field Theory, 2011 年 11 月 4 日, IHEP, 北京, 中国
② T. Kaneko, ``One-loop integrations with Hypergeometric functions'', ACAT 2011, 2011 年 9 月 8 日, Brunel Univ., London, UK.
③ T. Kaneko, ``Numerical calculation of one-loop integration with Hypergeometric functions'', 3rd CPP Workshop, 2010 年 9 月 24 日, KEK, 茨城県つくば市.
④ T. Kaneko, ``Sector decomposition via computational geometry'', 13th International Workshop on Advanced Computing and Analysis Techniques in Physics Research (ACAT 2010), 2010 年 2 月 26 日, インド・ジャイプール

６．研究組織
(1)研究代表者
金子　敏明（KANEKO TOSHIAKI）
大学共同利用機関法人高エネルギー加速器研究機構・計算科学センター・教授
研究者番号：40177522

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし