

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 4 月 10 日現在

機関番号：22604
 研究種目：基盤研究(C)
 研究期間：2009～2012
 課題番号：21540934
 研究課題名（和文） 動的障壁と量子局在：混合位相空間をもつハミルトン系における動力学理論
 研究課題名（英文） Dynamical Barrier and Quantum localization: Theory of Hamiltonian Dynamics with mixed phase space
 研究代表者
 首藤 啓 (SHUDO AKIRA)
 首都大学東京・大学院理工学研究科・教授
 研究者番号：60206258

研究成果の概要（和文）：

初期条件に応じて予測可能な軌道とランダムな軌道とが棲み分ける混合力学系の研究を行い、古典力学的には、両者の境界に起因する遅い緩和過程の機構を、量子力学的には、異なる起源をもつ局在現象の相関に関する新しい知見を得た。

研究成果の概要（英文）：

Hamiltonian systems with mixed phase space have been studied. The mechanism of slow motion in classical dynamics has been analyzed and the interplay between quantum localizations with different origins has been examined into details.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009 年度	900,000	270,000	1,170,000
2010 年度	800,000	240,000	1,040,000
2011 年度	700,000	210,000	910,000
2012 年度	500,000	150,000	650,000
総計	2,900,000	870,000	3,770,000

研究分野：非線形物理学

科研費の分科・細目：数理物理・物性基礎

キーワード：カオス，量子カオス，ハミルトン系，非可積分系，混合位相空間，遅い緩和，量子トンネル効果，複素力学系，半古典論，完全 WKB 解析，ストークス現象

1. 研究開始当初の背景

従来のハミルトン動力学の研究は、完全可積分系と呼ばれる、対称性の良い可解系、もしくは、その対極に位置する双曲力学系と呼ばれる理想カオス系を中心に研究が進められてきた。両者は、それぞれ現実の物理現象の複雑さの一側面を捉えるものではあるが、いずれも、物理、化学、さらには生物系にしばしば見られる階層的なタイムスケールや集団運動、遅い緩和過程など、動力学における多様性の発現過程を記述するには十分とは

言えない。

現実の物理過程に広く現れる、最も一般的な力学系は、完全可積分、理想カオス、いずれでもなく、ひとつの位相空間内に、可積分軌道とカオス軌道とを共存・混在させる「混合系」である。その位相空間は「混合位相空間」と呼ばれ、運動の形態を異にする様々な不変集合が棲み分ける。混合位相空間の本質は、それを構成する不変集合らが以下の意味で相矛盾する性質を併せ持つことにある。すなわち、質的に異なる不変集合が隣接し互いに

その動的特性を共有しつつ（カオス軌道が規則軌道の、逆に、規則軌道がカオス軌道の性質を帯びる）、それぞれが位相空間内で互いの動力学的な障壁を形成することである。古典、および量子力学の諸特性はすべてこの混合系特有の位相空間の非一様性に由来する。

混合位相空間をもつハミルトン力学系は、古典ならびに量子論ともに、過去 30 年ほどの間に多くの研究が行われ、物理の問題として一定の成果を収めてきた経緯がある。とくに、混合位相空間の動的障壁が隔てる各不変集合内での動力学についてはその理解はかなりのところまで進んだ。しかしながら、本研究が主題とするように、動的障壁をまたいだ動力学、という観点は実力学系を考える限りそもそも生まれる理由もなく、従って物理としての研究は皆無といっても良かった。ところが、量子論に目を向けると動的障壁の意味も自ずと違うものになり、これまでの混合位相空間をもつハミルトン系の研究ではほとんど研究の対象となることのなかった複素領域の力学系を調べる必要が生じる。本研究はそのような背景のもとで、混合位相空間における動的障壁の新しい側面と、動的障壁に隔てられた異なる不変集合の間における「異なる量子局在の相互作用」という観点を中心に研究が進められた。

2. 研究の目的

(1) 実面および複素面における可積分・カオス運動の境界について

混合位相空間上の動力学、とくにその緩和過程は、不変構造の境界の構造と強く関係する。可積分領域近傍にある軌道は、それがカオス領域にあるにも関わらず、可積分領域近傍に長時間留まり続け、系全体の緩和特性を律速する。本研究では、混合位相空間における、可積分領域とカオス領域との境界の構造を、近年その存在が明らかになった、単純境界をもつ混合系を中心に調べた。また、混合位相空間における量子局在の問題と関連して、複素空間における可積分領域の自然境界（複素面内の特異点の集積によって発生する解析接続不能な領域）について解析を行った。

(2) 混合位相空間と大自由度ハミルトン系の遅い緩和過程

少数自由度系においては、混合位相空間内に可積分領域とカオス領域とが混在することによって遅い緩和が引き起こされる。このことは既によく知られるところであるが、大自由度系、たとえば、ガラス状態、あるいは過冷却液体などで見られる遅い緩和過程は、こ

れまでいわゆる力学系理論とは全く違う観点から理解されてきた。ここでは、大自由度系における遅い緩和過程を力学系の観点から捉えることを目的として、できるだけ単純なモデルを用いて大自由度系における遅い緩和現象の理解を深めることを目指した。

(3) 混合位相空間における異種量子局在の共存と相関

古典混合位相空間には、周期軌道、準周期軌道、カオス軌道など、運動形態を異にする不変集合が共存する。対応する量子論では、不安定周期軌道上の局在（スカー現象）、可積分領域上の量子局在、カオス領域上の動的局在など、異なる起源をもつ量子局在が混合位相空間内で同時に現れる。これらは、ここ 20 年ほどの量子カオスの研究で発見され、個々の出現機構については既に多くの研究がある。それに対し本研究では、起源を異にする様々な量子局在現象間の相関に注目する。ここでは特に、「動的トンネル効果」と呼ばれる、古典的には許容されない不変構造内での量子遷移と、アンダーソン局在と類似の性質をもつ「動的局在」と呼ばれるカオス領域でおこる波動関数の指数的局在（両者はともにボーズ凝縮を用いた冷却原子系において実験的観測の対象にもなっている）との関係に中心に調べた。

(4) 完全 WKB 解析にもとづくストークス幾何学と混合系の半古典論

混合系の量子動力学を理解するための理論的手段として、非可積分系における完全 WKB 理論を開発・発展させる。また、それを用いた多自由度系、さらには混合系固有の純量子論的效果の発生機構解明を行う。WKB 理論が量子力学の近似理論として発展してきた経緯は既に広く知られるところであるが、数学者によって提唱された完全 WKB 法は、その意味が曖昧なまま手つかずの状態であった、いわゆるストークス現象（漸近解の消滅と生成現象）に対する厳密な意味付けを与え、ストークス幾何学、という新しい領域を拓くにまで至った。本研究では、量子カオス系の解析に完全 WKB 解析を導入することにより、混合位相空間に固有な純量子効果を調べることが目的とした。

3. 研究の方法

(1) 実面および複素面における可積分・カオス運動の境界について

混合系の難しさは、可積分領域とカオス領域とが位相空間上に自己相似構造状に現れ、その境界が非常に複雑な構造をもつことにある。それに対し近年、可積分・カオス領域間

の境界が単純な形状をした混合系が見出され新しい方向からの解析の可能になった。ここでは、実面上の可積分・カオス運動領域の境界の問題として、新しく見出された単純混合系を用いることにより、自己相似構造的な混合位相空間の生成過程を考察することから始め、混合位相空間の設計問題に発展させる。特に、境界領域に集積する長周期の不安定周期軌道を系統的に調べることにより境界の構造を詳しく解析し、緩和過程を律速する力学的な起源を明らかにする。混合位相空間上のトンネル効果は、動力学を複素領域に拡張した複素力学系によって記述されるが、可積分領域とカオス領域との境界はその問題の中核を成す。ここでは、可積分成分（可積分トーラス）の解析接続可能性の条件、ならびに、その解析接続可能な限界（自然境界）の幾何学的な構造を調べ、可積分・カオス運動の境界の複素解析的な観点からの解析を行った。

(2) 混合位相空間と大自由度ハミルトン系の遅い緩和過程

大自由度系では、位相空間に占める可積分成分の体積が小さいため、少数自由度系で有効であった混合位相空間描像に基づく遅い緩和機構は働かなくなることが信じられている。ここでは、定負曲率をもつ面上で剛体衝突、あるいはレナード・ジョーンズ型の相互作用をする多体粒子系をモデルとして大自由度系において遅い緩和が発生するミニマルな条件を探る。負曲率面上においては平面のもっていた並進対称性が失われるため、局所的な格子構造は保持しつつも長距離秩序を保つことができなくなる。結果、ランダムネスを手で入れることなく、系にフラストレーションを内在させることが可能になり、条件次第では動力学にフラストレーション解消に伴う遅い遷移運動を発生させることができる。

(3) 混合位相空間における異種量子局在の共存と相関

異なる起源をもつ量子局在間の遷移過程を複素古典動力学を用いて記述する。我々はこれまで、可積分領域からカオス領域へのトンネル過程（動的な障壁を越えるトンネル過程であるため「動的トンネリング」と呼ばれる）において、複素力学系のジュリア集合と呼ばれる集合が中心的役割を果たすことを発見し、さらにその数学的な基礎付けを与えた。本研究では、その手法とこれまでに蓄積された知見をもとに、可積分領域上の量子局在と、「動的局在」と呼ばれる、アンダーソン局在類似のカオス領域上の量子局在との関係を調べる。また、関連して、近年発見された「両生固有状態」と呼ばれる、対応する古典可積

分領域とカオス領域の両方にまたがる量子状態（古典的に許容されない不変構造間をまったく自由にトンネルすることができるような状態）に対する解析を進める。通常、エネルギーの十分大きな極限では、混合位相空間の固有関数は、可積分領域とカオス領域とのいずれかに局在し、相互の結合は指数関数的に小さいものと信じられていた。両生固有状態の発見はこの常識を根本的に覆すものであり、その発生機構と存在条件の解明は、混合系の量子効果の喫緊の課題となっている。

(4) 完全 WKB 解析にもとづくストークス幾何学と混合系の半古典論

混合位相空間における量子局在間の相関は、位相空間上で離れた領域間での「量子相関」を問題にすることに他ならない。本研究の一貫した立場は、量子効果と古典位相空間の構造とを結びつけることであり、それを実現するための複素半古典理論についても、この量子相関の効果を正しく取り入れたものでなければならぬ。完全 WKB 解析は、Borel 総和法を介して、発散級数に解析的な意味付けを与えることに成功し、最近に至って、高次元、非可積分系に対しても適用可能なまでに発展した。ここでは、混合位相空間をもつ 2 次元写像系についてのストークス幾何学を調べる。高次元のストークス幾何学には、仮想的転回点、新しいストークス線など、従来のストークス現象には現れない高次元固有の構成要素が本質的な役割を果たす。まず、これらを効率よく計算するアルゴリズムを開発し、ストークス線と転回点からなるストークスグラフのグラフ論的な分類を行うための準備を行う。これらの準備のもとに、混合系のストークス幾何学に対して、ストークス幾何学の分岐理論を構築することによって、混合系の量子相関の解析を進めていく。ストークス幾何学の分岐理論とは、古典力学系理論で開発された混合系を理解する手法である pruning 理論にヒントを得たものである。

4. 研究成果

(1) 実面および複素面における可積分・カオス運動の境界について

2 自由度ハミルトン系のモデルである 2 次元保測写像において、トーラスの近傍の性質を詳細に調べた。区分的に線形な写像を用いることにより、パラメータの変化によってトーラスがつぶれた構造である中立安定な周期軌道族が存在する位相空間を実現することができる。ここでは、再帰時間分布に注目し、中立周期点族を位相空間中にもつ、いくつか

の簡単な2次元力学系に対し数値計算を行い、以下の点を明らかにした。1. 再帰時間分布は、再帰領域の位置・大きさに依存し、位相空間の非一様性を強く反映する。2. 中立周期点の族が位相空間に存在する場合でも、再帰領域の面積を小さくした極限で指数分布が現れる。指数分布は、双曲力学系（理想的なカオス系）において典型的に見られる再帰時間分布である。以上より、中立周期点の族をもつ系の従来の予想（再帰時間分布がべき則に従う）は再帰領域の有限サイズ効果によるものである可能性が明らかになった。一方、完全可積分な系に摂動の加わったハミルトン系の位相空間では、一般に、カオス領域のなかに自己相似状の規則領域が混在する。これら規則領域の周辺で軌道は長時間滞在するが、個々の規則領域近傍での淀みのみならず、それらが階層構造を成し自己相似状に配置されていることが軌道をされに律速している可能性が以前から指摘されてきた。本研究では、その予想を確かめるべき、階層的島構造をもつ区分線型な2次元写像を詳細に解析し、軌道の長時間相関に対する階層性の影響がこの系に関する限りほとんど見られないことがわかった。

(2) 混合位相空間と大自由度ハミルトン系の遅い緩和過程

定負曲率面上を運動する多粒子系のリアプノフスペクトルを調べることにより、長時間の構造緩和に関わる遅い運動の起源を力学系理論の観点から検討した。特に、低次のリアプノフスペクトルでは運動量の成分が支配的であり、高次になるほど相対的に位置の成分が大きくなること、また異なる時刻間のリアプノフベクトルの相関は低次のリアプノフベクトルの方がより強く、高次になるほど弱まることを見出された。また、適当な局所秩序変数を導入し、一定時間での粒子の運動の移動度と秩序変数との対応関係を調べた。粒子の移動が少なく比較的安定な領域と、粒子が大きく移動している領域が空間的に不均一に分布していること、また、移動度の空間的な不均一性は、曲率の効果（フラストレーション）により発生した局所秩序構造の空間的な不均一性に由来していることなどが明らかになった。

(3) 混合位相空間における異種量子局在の共存と相関

2次元系（具体的に解析したのは結合した撃力振動子系）における動的トンネル効果を、時間領域・エネルギー領域双方について調べ、カオス領域の動的局在の効果弱くなることによる（規則領域からカオス領域への）トンネル確率の異常増大を確認した。とくに、不規則系において知られているアンダーソ

ン転移と呼ばれる局在・非局在転移がカオス領域に起こることを契機に「両生状態」が出現することを突き止めた。この事実は、既に我々が行った雑音印加による動的局在効果の無効化によるトンネル確率の増大と矛盾のない結果である。また、理想モデルに対して見出された「アンダーソン転移に誘起された動的トンネル効果の異常増大」がケプラー写像と呼ばれる振動電場中のイオン化過程を記述するミニマルなモデルにおいても同様に現れることを数値的に確認した。トンネル確率の増大はイオン化確率の増大をもたらす。このことにより、多自由度系における動的トンネル効果の異常増大は系の詳細に寄らず、実験的にも検証可能な普遍的なものであることが示唆された。

(4) 完全WKB解析にもとづくストークス幾何学と混合系の半古典論

エノン写像はカオスを示す最も単純な2次元写像のひとつである。写像が多項式で与えられることから、対応する量子論の時間発展核に寄与する鞍点解（複素古典軌道）の寄与・非寄与問題を解析するためのミニマルなモデルとなっている。また、一回写像の時間発展核は、よく知られたエアリ積分と等価なものになり、光学の回折現象をその初等カタストロフの観点から分類した、いわゆる回折カタストロフの標準型とも関連が深い。ここでは、エノン写像がいわゆる馬蹄条件を満たす、すなわち、系が位相的にスモールな馬蹄力学系と共役になるような状況でのストークス幾何学を詳しく解析した。その結果、量子論の時間発展核に寄与する鞍点解（複素古典軌道）が、ストークス幾何の大域的性質を反映して非自明な相殺を起こすことがわかった。また、その機構の解析を行い、写像回数無限大でのトンネル解の個数に対する詳しい漸近評価を得た。それに対し、回折カタストロフの拡張として多項式作用をもつ1重積分を考え、その比較を行った。その結果、引き延ばしと折れたたたみ過程の繰り返しから得られるエノン写像の鞍点解の間には、ストークス幾何を介した相関が存在するのに対し、回折カタストロフから得られる鞍点解の間にそのような相関が特に存在しないことがわかった。

5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計12件）

1) A. Shudo and K. S. Ikeda, Tunneling effect and natural boundary of invariant torus, Phys. Rev. Lett. 査読有, 109 (2012) 154102

(5 pages)

doi:10.1103/PhysRevLett.109.154102

2) A. Ishikawa, A. Tanaka, Y. Hanada and A. Shudo, Flooding of wave functions in multi-dimensional mixed systems and the possibility of experimental observation, AIP Conference Proceedings, 査読無, Vol. 1468, Proceedings of "Let's Face Chaos Through Nonlinear Dynamics" 8th International Summer School and Conference, edited by M. Robnik and V. Romanovski, (2012) pp.340-349

doi:http://dx.doi.org/10.1063/1.4745593

3) A. Ishikawa, A. Tanaka, A. Shudo, and K. S. Ikeda, Diffraction and tunneling in systems with mixed phase space, Phys. Rev. E. 査読有, 86 (2012) 036208 (14 pages)

doi:10.1103/PhysRevE.86.036208

4) A. Ishii, A. Akaishi, A. Shudo, and H. Schomerus, Weyl law for open systems with sharply divided mixed phase space, Phys. Rev. E, 査読有, 85 (2012) 046203 (7 pages)

doi:10.1103/PhysRevE.85.046203

5) A. Akaishi, M. Hirata, K. Yamamoto and A. Shudo, Meeting time distributions in Bernoulli systems, 査読有, J. Phys. A: Math. Theor. 44 (2011) 375101 (12 pages)

doi:10.1088/1751-8113/44/37/375101

6) T. Harayama and A. Shudo, Boundary element method and isospectrality in quantum billiards. 『物性研究』, 査読無, 97 (2011) 414-420

7) A. Ishikawa, A. Tanaka and A. Shudo, Dynamical tunneling in many-dimensional chaotic systems, Phys. Rev. Lett., 査読有, 104 (2010) 224102 (4 pages)

doi:10.1103/PhysRevLett.104.224102

8) A. Shudo, Y. Ishii and K. S. Ikeda, Julia set and chaotic tunneling II, J. Phys. A: Math. Theor. 査読有, 42 (2009) 265102 (34pages)

doi:10.1088/1751-8113/42/26/265102

9) A. Ishikawa, A. Tanaka and A. Shudo, Recovery of chaotic tunneling due to destruction of dynamical localization by an external noise, Phys. Rev. E, 査読有, 80 (2009) 046204 (13 pages)

doi:10.1103/PhysRevE.80.046204

10) A. Akaishi and A. Shudo, Accumulation of unstable periodic orbits and the stickiness in the two-dimensional piecewise linear map, Phys. Rev. E, 査読有, 80 (2009) 066211 (12 pages)

doi:10.1103/PhysRevE.80.066211

11) A. Shudo, Y. Ishii and K. S. Ikeda, Julia sets and chaotic tunneling I, J. Phys. A: Math. Theor. 査読有, 42 (2009) 265101 (26pages)

doi:10.1088/1751-8113/42/26/265101

[学会発表] (計 57 件)

1) 首藤 啓, 混合系の量子論と複素力学系におけるエルゴード問題, 非線形・平衡系シンポジウム—新しいエルゴード問題の探究—, 2013 3, 早稲田大学

2) A. Shudo, Introduction to exact WKB method, The 11th Christmas symposium of Physicists, 2012 12, Maribor, Slovenia

19) R. Ohashi and A. Shudo, Numerical verification of the exact WKB analysis for multilevel nonadiabatic transition problems, Recent developments in microlocal analysis and asymptotic analysis 2012 10, RIMS, Kyoto

3) A. Shudo, Tunneling effect and the natural boundary of invariant tori, Post Advanced Study Group meeting, 2012 10, Dresden, Germany

4) A. Shudo, Role of natural boundaries of KAM curves in quantum tunneling problems, Let's face chaos through nonlinear dynamics, 2011 7, Maribor, Slovenia

5) A. Shudo, What does theory of complex dynamics tell us?, MIPPKS focus meeting, Dynamical Tunneling in Non-Integrable Systems, 2011 6, Dresden, German

6) A. Shudo, Diffraction and Tunneling in the system with sharply divided phase space, International workshop on microcavities and their applications (WOMA2011), 2011 5, Pusan University, South Korea

7) A. Shudo, Quantum tunneling with and without chaos, Satellite meeting of the international workshop on microcavities and their applications (WOMA2011), 2011 5, Seoul National University, South Korea

8) A. Shudo, A role of new Stokes curves and virtual turning points in multilevel non-adiabatic transition problems, RIMS workshop on Exponential asymptotics and virtual turning points, 2011 3, RIMS, Kyoto

9) 首藤 啓, 複素力学系と高次元トンネル効果における転移現象, 第5回ハミルトン力学系セミナー 2011 2, 京都大学

10) 首藤 啓, 古典および量子カオス, 早稲田大学物理及応用物理学専攻講演会 2011 2,

早稲田大学

- 11) A. Shudo, Interior and exterior problem in quantum billiards, 13th Slovenia-Japan International Workshop on Nonlinear Dynamics, 2010 11, Waseda
- 12) 首藤 啓, カオス --- 偶然と必然が同居する摩訶不思議な世界, 高知工科大学特別講義, 2010 7, 高知工科大学
- 13) A. Shudo, Julia sets and chaotic tunneling, Tunneling Day, 2010 5, Lewiner Institute for Theoretical Physics, Haifa, Israel
- 14) A. Shudo, Pruning theory of Stokes geometry, MPIPKS Workshop, Tunneling and Scattering in Complex Systems --- from single to many particle physics---, 2009 9, Dresden, Germany
- 15) A. Shudo, Complex semiclassical approach to chaotic tunneling problem (part III), MPIPKS Workshop, Tunneling and Scattering in Complex Systems --- from single to many particle physics---, 2009 9, Dresden, Germany
- 16) A. Shudo, Complex semiclassical approach to chaotic tunneling problem (part II), MPIPKS Workshop, Tunneling and Scattering in Complex Systems --- from single to many particle physics---, 2009 9, Dresden, Germany
- 17) A. Shudo, Complex semiclassical approach to chaotic tunneling problem (part I), MPIPKS Workshop, Tunneling and Scattering in Complex Systems --- from single to many particle physics---, 2009 9, Dresden, Germany
- 18) A. Shudo, Dynamical localization and dynamical tunneling, International workshop on microcavities and their applications (WOMA), 2009 8, Seoul National University, South Korea
- 19) A. Shudo, Role of natural boundaries of KAM curves in dynamical tunneling problems, RIMS workshop on New development of asymptotic analysis and dynamical systems, 2009 6 RIMS, Kyoto

[図書] (計 3 件)

- 1) 首藤 啓 『数理物理 私の研究』 (シュプリンガー, 2012) pp. 219-224
- 2) 首藤 啓 『古典と量子の間』 (岩波書店, 2011) 144 pages
- 3) A. Shudo and K. S. Ikeda
Complex semiclassical approach to chaotic tunneling in “Dynamical Tunneling”

edited by Srihari Keshavamurthy and Peter Schlagheck (CRC Press, 2011) Chapter 7, pp.139-176.
4) 首藤 啓 『別冊数理科学』 (サイエンス社, 2010) pp.181-187.

[その他]
ホームページ等
<http://www.comp.tmu.ac.jp/nonlinear/ja/index.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

首藤 啓 (SHUDO AKIRA)
首都大学東京・大学院理工学研究科・教授
研究者番号 : 60206258

(2) 研究分担者

田中 篤司 (TANAKA ATUSHI)
首都大学東京・大学院理工学研究科・助教
研究者番号 : 20323264

(3) 連携研究者

斎藤 真司 (SAITO SHINJI)
分子科学研究所・計算科学研究系・教授
研究者番号 : 70262847
石井 豊 (ISHII YUTAKA)
九州大学・数理学研究院・准教授
研究者番号 : 20304727