

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 5月 11日現在

機関番号：12102

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2009～2011

課題番号：21650063

研究課題名（和文） 統計学における逆問題的構造の解明とその応用

研究課題名（英文） The clarification of the structure of the inverse problem in statistics and its applications

研究代表者

赤平 昌文 (AKAHIRA MASAFUMI)

筑波大学・副学長

研究者番号：70017424

研究成果の概要（和文）：完備十分統計量が存在するとし、実母数の実数値関数が或る収束半径の円内で整級数展開可能であると仮定し、その円内でその関数の UMVU 推定量を構成した。また、その円内で UMVU 推定量が存在する場合に、それが母数空間全体で不偏性を満たせば、全体で UMVU 推定量になる。例えば、指数分布、一様分布等の場合に所与の母数空間において UMVU 推定量を構築できることが示された。

研究成果の概要（英文）：Suppose that there exists the complete sufficient statistic and the expansion of power series of a real-valued function of a real parameter is admitted in the circle with a certain convergence radius. Then it is shown to be possible to construct the UMVU estimator of the function in it. Further, in the case when there exists the UMVU estimator in the circle, if the unbiasedness of the estimator holds for the whole parameter space, then it is the UMVU estimator. For example, in exponential and uniform cases it is shown to construct the UMVU estimator in the given parameter space.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,100,000	0	1,100,000
2010年度	1,000,000	0	1,000,000
2011年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,100,000	300,000	3,400,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：不偏性、十分性、完備性、統計量、推定量、分散、正則条件、指数型分布族

## 1. 研究開始当初の背景

一般に、統計学においては、「前提条件の下で結論を導出する」という順問題が通常であるが、これの逆問題を「結論から前提条件を導出する」と捉えることにする。従来、こ

のような見方は、あったと思われるが、従来は明確には考えられてこなかった。例えば、位置母数推定問題において、位置母数  $\theta$  を持つ正規分布からの大きさ  $n$  の無作為標本に基づく標本平均は  $\theta$  の一様最小分散不偏

(uniformly minimum variance unbiased 略して UMVU)推定量になるが、その逆問題として、「 $n$  が 3 以上のときに、標本平均が  $\theta$  の UMVU 推定量になるのは正規分布に限るか」という逆問題が考えられ、これの肯定は正しい命題になる。しかし、「位置母数  $\theta$  の UMVU 推定量が存在するのは、正規分布の場合に限るか」という逆問題の肯定は正しい命題でなく、実際、指数分布、2重指数分布の場合にも  $\theta$  の UMVU 推定量が存在するので、「 $\theta$  の UMVU 推定量が存在するのは、正規分布、指数分布、2重指数分布に限られるか」という逆問題も考えられるが、これは未解決問題である。これまでは、有名な著書“Theory of Point Estimation,” by E. L. Lehmann and G. Casella(1998)等においては順問題は論じられているが、逆問題はほとんど論じられていない。また、研究代表者らも適当な正則条件の下で統計的推測方式の有効性等を順問題として捉えてこれまで研究してきた(例えば、研究代表者らの論文集 “Joint Statistical Papers of Akahira and Takeuchi”(2003)参照)。しかし、このような順問題だけでは、前提条件の意味がはっきりしないことが起きる。例えば、不必要な条件やあまり意味の無い条件を仮定してもあまり気がつかないようなことも起こり得る。そこで、逆問題に取り組むことが重要になる。統計的推測理論においては、「統計的モデルにおいてデータの分布を導出する」という順問題に対して、「データの分布から統計的モデルを導出する」という逆問題が考えられる。このような逆問題を考えることによって、従来の統計的モデルより有効なモデルを見つけられることができ、前提条件の意味も明確になり、豊かな理論を作り出すことができ、その応用においても的確性が増すことになる。

## 2. 研究の目的

本研究においては、「統計的モデルの前提条件の下で統計的推測方式の性質を導出する」という順問題に対して、「統計的推測方式の性質から統計的モデルの前提条件を導出する」という逆問題を考える。特に、通常の正則条件が必ずしも成り立たないような非正則な場合にこのような逆問題についても考察する。

## 3. 研究の方法

位置尺度母数推定における逆問題については、まず先行研究の文献を詳細に調べてその関連性を含めてよく検討する。そして、位置母数推定の場合に、完備十分統計量が存在するときに、位置母数の一様最小分散不偏推定量が存在するのは、正規分布、指数分布、2重指数分布に限られるか否かを調べる。また、

完備十分統計量が存在しない場合にも同様のことを調べる。しかし、完備十分統計量が存在しない場合には、小標本論の立場からは難しいので、大標本論の観点から漸近十分統計量の性質をうまく用いて理論を展開する。

## 4. 研究成果

最小分散不偏推定問題において一様最小分散不偏(UMVU)推定量の構成について従来、様々な提案がなされてきたが、特に、Jani and Dave(1990)のアプローチに着目してその構成法を詳しく検討した。その方法で本質的なことは完備十分統計量の分布に極めて依存していて、不偏性の条件から積分方程式を解く形である。本研究では、具体的に UMVU 推定量を構成するためには、完備十分統計量の分布を表現している関数にどのような条件を課すれば良いかという問題を考えた。そこで課した条件は比較的簡単にチェックできるという利点を持っている。また、同様なアプローチを2母数指数型分布族の場合に拡張し、その例も提示した。従来の方は、1母数の場合に限定されることが多いので、新奇性があると思われる。

最小分散不偏推定問題において一様最小分散不偏(UMVU)推定量の構成について、従来から様々な提案がなされてきた。最近、Mukhopadhyay and Bhattacharjee(2010)は母数の関数が無限個の関数として表現される場合に、各関数の不偏推定量が完備十分統計量に基づいて存在することを仮定して母数の関数の MVU 推定量を求めた。しかし、母数の関数が無限和で表現されるような母数の範囲がやや曖昧であるために UMVU 推定量までの議論に至っていなかった。本研究では、完備十分統計量が存在するとし、実母数の実数値関数が母数空間の或る収束半径の円内で整級数展開可能であると仮定し、その収束半径の円内でその関数の UMVU 推定量を構成することができた。ここで、その収束半径の円内から母数空間まで拡張できるかという問題が生ずるが、すでに、このことは不偏推定量に関して一般には成り立たないことが分かっている。しかし、もっと制限して、UMVU 推定量に関してはその拡張が成り立つか否かは分かっていないので、これについては、収束半径内で UMVU 推定量が存在する場合に、それが母数空間全体で不偏性を満たすか否か確認することで調べた。その確認は必ずしも容易ではないが、指数分布、一様分布等の場合には確認できて、与えられた母数空間において UMVU 推定量を構築することができることが示された。

また、Mukhopadhyay(2006)と同様にして、曲指数型分布族の典型として平均と分散が同じであるような正規分布において、平均に対する最小分散不偏性について考えた。この

場合には完備十分統計量  $T$  が存在するので、Mukhopadhyay(2006)は、その関数で不偏推定量が求められればそれが一様最小分散不偏推定量になるが、それは困難なので、 $T$  の定数倍から成る推定量  $cT$  をその候補と考えて適当な定数  $c$  を決めることで不偏推定量を見つけることができるのではないかと予想した。その推定量の期待値が積分表示されるので、計算ソフト MAPLE を用いて数値計算を行った結果、その予想は成り立たないのではないかと推測している。この点について検討した結果、その推定量の期待値は解析的に計算可能であることを示し、平均に対する不偏推定量は  $T$  の線形式では不可能であることを理論的に示した。

さらに、両側が切断されている分布族を考えた。このとき、極値統計量は 1 次の漸近十分統計量となり、その際、情報量損失の観点から考えると、極値統計量は 1 次の漸近一般情報量損失は起こさないことが分かる。さらに、2 次の漸近一般情報量損失を起こさない統計量は存在するかという逆問題を考えると、それは極値統計量と範囲の中央でのスコアの値の組による統計量になることが示され、これは、1 次のオーダーでは切断分布の密度の両端点での情報を取り込むような極値統計量を考えれば良いが、2 次のオーダーではさらにその密度の滑らかな部分の情報の取り込みも必要であることを意味している。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 11 件)

- ① Yata, K. and Aoshima, M. (2012). Effective PCA for high-dimension, low-sample-size data with noise reduction via geometric representations. *J. Multivariate Anal.*, 査読有, 105, 193–215, DOI: 10.1016/j.jmva.2011.09.002
- ② Kim, H.G. ・ 大谷内奈穂 ・ 赤平昌文 (2011). The non-regular statistical structure from the viewpoint of the loss of information. 京都大学数理解析研究所講究録, 査読無, 1758, 90–99, <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku>
- ③ Kim, H.G. ・ 大谷内奈穂 ・ 赤平昌文 (2011). Remarks on uniformly minimum variance unbiased estimation. 京都大学数理解析研究所講究録, 査読無, 1758, 195–201, <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku>
- ④ Koike, K. (2010). Sequential estimation procedures for end points of support in a non-regular distribution. *Commun. Statist.* –

*Theory and Methods*, 査読有, 39, 1585–1596, DOI: 10.1080/03610920802422605

- ⑤ 小林裕子・矢田和善・青嶋 誠 (2010). Note on robust estimation and model selection in a contaminated mixture model. 京都大学数理解析研究所講究録, 査読無, 1703, 159–179, <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku>
  - ⑥ 赤平 昌文 ・ 竹内 啓 (2010). Estimation of a nonnegative-valued normal mean from the Bayesian viewpoint. 京都大学数理解析研究所講究録, 査読無, 1703, 215–223, <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku>
  - ⑦ Akahira, M. (2010). The first- and second-order large-deviation efficiency for an exponential family and certain curved exponential models. *Commun. Statist.—Theory and Methods*, 査読有, 39, 1387–1403, DOI: 10.1080/03610920802452578
  - ⑧ Yata, K. and Aoshima, M. (2010). Intrinsic dimensionality estimation of high-dimension. *Commun. Statist.—Theory and Methods*, 査読有, 39, 1511–1521, DOI: 10.1080/03610920903121999
  - ⑨ Akahira, M. (2009). The structure of higher order asymptotic theory of statistical estimation. *Amer. Math. Soc. Transl.*, 査読無, Ser.2, 175–197, <http://www.ams.org/bookstore/pspdf/trans2-227-toc.pdf>
  - ⑩ 小池 健一 (2009). 非正則分布における分布の台の端点における逐次推測について. 京都大学数理解析研究所講究録, 査読無, 1621, 104–111, <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku>
  - ⑪ Kim Hyo Gyeong・赤平 昌文(2009). On the minimum variance unbiased estimation. 京都大学数理解析研究所講究録, 査読無, 1621, 29–41, <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku>
- [学会発表] (計 3 件)
- ① Akahira, M., Ohyauchi, N. and Kawai, S. : A higher order approximation to the distribution of a non-central t-statistic under non-normality. The 58th World Statistics Congress of the International Statistical Institute, 2011年8月23日, Convention Centre Dublin, Ireland.
  - ② 赤平昌文 ・ Kim, H.G. ・ 大谷内奈穂 : Loss of information associated with the statistic for a family of non-regular distributions. 日本数学会年会, 2011年3月22日, 早稲田大学.
  - ③ 赤平昌文 ・ 大谷内奈穂 ・ 河合伸一 : A higher order approximation to the distribution of a

non-central t-statistic without the normality assumption. 日本数学会年会, 2010年3月26日, 慶応義塾大学.

〔図書〕(計1件)

① 広中平祐代表(2009). 現代数理科学事典(第2版)、丸善、分担執筆「推測の漸近理論」pp.549—553.

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

赤平 昌文(AKAHIRA MASAFUMI)  
筑波大学・副学長  
研究者番号: 70017424

### (2) 研究分担者

青嶋 誠(AOSHIMA MAKOTO)  
筑波大学・数理物質系・教授  
研究者番号: 90246679  
小池 健一(KOIKE KEN-ICHI)  
筑波大学・数理物質系・准教授  
研究者番号: 90260471  
大谷内奈穂(OHYAUCHI NAO)  
筑波大学・数理物質系・助教  
研究者番号: 40375374