様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２４年　５月３１日現在

機関番号：１４３０１
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2009～2011
課題番号：２１６５４００３
研究課題名（和文）　微分方程式の合流過程と複素解析空間の変形理論

研究課題名（英文）　Confluence process of differential equation and deformation of complex analytic space

研究代表者
伊藤　公毅（ITO KOKI）
京都大学・数理解析研究所・研究員
研究者番号：３０４５６８４２

研究成果の概要（和文）：自然現象の記述、工学等応用上現れる数量的関係は須く方程式、とりわけ微分方程式乃至差分方程式で表現される。この解と元の方程式の相互作用を研究してきた。例えば、重要な数、円周率πもある微分方程式とその解の相互作用から生み出される。（この相互作用を「ベッチ構造とド・ラーム構造の比較」或は単に「周期」とよぶ。）この様な相互作用は方々に現れ、並行な議論が可能な様に思われる。ところが、これら全てを包括し適用できる一般的枠組みがない。そこで、この様な枠組みを模索し、１つのプロトタイプの構想を得た。

研究成果の概要（英文）：Describing the natural phenomena or relationships among various quantities in such fields as physics, engineering, we use equation; especially differential or difference equation. We study some interaction between equation and its solution. For example, such an interaction produces the important number π. (Such interactions as above are called “comparison between Betti structure and de Rham structure” or “period”.) Various periods appear in various places, and we believe that there exists a common framework for all over the periods. However, nobody has found one yet. So, we have groped for an answer to this question. Finally, we found seeds of prototype.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００９年度	1,200,000	0	1,200,000
２０１０年度	800,000	0	800,000
２０１１年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総　計	3,100,000	330,000	3,430,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：微分方程式、q 差分方程式、オイラー型積分、周期、ド・ラーム構造、ベッチ構造、比較同型、リーマン・ヒルベルト対応

１．研究開始当初の背景

種々の特殊函数は、物理・工学への応用上重要であるのみならず、純粋数学における研究対象としても大変興味深いものである。応用に堪えうる所以は、計算が美しくコントロールできる点にあり、これは背後構造に由来す

る。この背後構造こそ、純粋数学のお家芸である。特にオイラー型積分表示をもつ特殊函数について一言で云えば、周期、つまりベッチ構造とド・ラーム構造の比較同型がその背後構造である。このことを青本氏がはじめて指摘し、超幾何函数の一般化をえたのであった。ところが、全てのオイラー型積分について、この様な定式化が実現している訳ではない。特に、応用上も重要な不確定特異点型についての知見は乏しいのが現状であった。この状況は、現在も続いている。

２．研究の目的
オイラー型積分及びその親類縁者を須く周期の観点から理解することが目的である。特に、不確定特異点型の理解を、確定特異点型のある種の極限（合流過程）を通して理解しようというのが当初の目的であった。

３．研究の方法
射影代数多様体上の$\mathcal{D}$加群のリーマン・ヒルベルト像は（リーマン・ヒルベルト対応が確立しているとするならば）代数的ド・ラーム実現を持つ。一方、構成可能層はベッチ実現を持つ。この両者の比較（同型）として生み出される量が周期である。
これは、確定特異点型ならば完全に上手くゆく。しかし、これを一度超えると（特にベッチ構造において）困難に遭遇する。不確定特異点型やｑ類似等では未知なる部分が多々ある。確定・不確定、微分・ｑ差分を問わず共通に適用できる周期の枠組みを作る必要がある。
そこで、上記処方にのせるべく、空間概念を拡張し、その上に位相的構造と解析的構造を設定しリーマン・ヒルベルト対応を確立する。ついで、ベッチ実現、ド・ラーム実現をつくりその比較をとる、という戦略をとる。
不確定特異点型については、確定特異点型の極限（合流過程）として記述されるべきであるが、これは拡張された空間の変形理論と解釈される。
というわけで、先ずは空間概念の拡張を模索することから始める。特にｑ差分など、些か毛色の違うところを考察する。毛色の違い故に却って共通原理がうきぼりになる。
ｑ差分に関しては、

- ｑシフト作用素の反復合成についての漸近解析
- ｑ差分作用素の局所的記述（層の議論にもちこむ）
- トーリック多様体の幾何学

を用いて、あるべき自然なチェックコホモロジーを実現し、先ずチェック・ドラーム同型を導く。この結果を踏まえて、あるべきベッチ構造を見出す。

４．研究成果
不確定型微分方程式を確定特異点型微分方程式の極限として理解する為の第一歩として、確定・不確定を問わず通用する周期の理論を模索し、そのプロトタイプと期待できる枠組みの１つを見出した。これは、ｑ 類似においてであった。

（１）ｑ 類似の場合についてあるべき空間の一候補を見出した。
ベッチ構造、ド・ラーム構造を取り出す為の空間としては、

- ｑ 差分ド・ラーム複体がこの空間上局所的に定義され
- この空間はコンパクト代数多様体に“近い”もの

を考えるのである。具体的には、

- ｑ 差分方程式の定義域である代数トーラスをコンパクト化したもの（既に青本氏が導入しているあるトーリック多様体）上の、ｑ 倍作用での不変開集合＋ｑ 倍作用素の方向のデータからなる景（グロタンディーク位相）を考え
- 構造層としては、ある方向へのｑシフト作用素の反復合成についての漸近挙動で縛りをいれた函数たちを導入する。

これを用いると、以下で述べる様なことが期待され当座の目標の実現が期待される。
上で提案した空間上ではｑ差分ド・ラーム複体が局所的に定義されるので、層の議論に持ち込むことが可能になる。特に、局所解の層が定義できる。一方で、ド・ラーム複体の各項として、上記の構造層を係数にもつものを採れば、漸近挙動の縛りがある為、その大域切断は有理的なものに限られてしまう。従って、代数的ド・ラームコホモロジーに帰着される。
少し技術的な話になるが、ｑ シフト作用素の反復合成による漸近挙動としては、ｑ 周期的函数×冪函数×底ｑの指数函数なるものに限って考える。このｑ周期的函数×冪函数の部分についての微分のデータを追加したものを、ｑ 差分作用素の拡張（ｑ 差分作用素の局所版）として考える。（この様な付加データがないと局所解の層が有限階数にならない。）元来の ｑ 差分作用素は、この漸近挙動の微分をモジュロしたものになっている。この意味で、現在知られているｑ差分ド・ラーム複体は“相対的”ド・ラーム複体（もう少し細かく云えば、“モーメント写像に関して相対的”）と云える。これまで他者によって考察されてきたものと、私がここで提案するものは、このモーメント写像での押し出しで関係づけられる。
上記のことが完遂された場合、青本氏によって提出されているｑ差分ド・ラーム・コホモロジーに関する幾つかの予想に解答を与え

ることが可能である。
ここまでは、チェックコホモロジーとドラームコホモロジーの比較になっている。これをふまえてベッチ構造を見出すことができるであろう。このもとで、最終的にリーマン・ヒルベルト対応を定式化し証明してゆくことになるであろう。
次に為すべきことは、ここで掲げた方法論の類似を不確定特異点型微分方程式の場合について展開することである。(研究の経緯から云うと、寧ろ不確定特異点型の考察の中からｑ類似での在り方が見えてきたのだが…)
そもそも、問題の元凶がどこにあったかというと、古典的な位相空間においては、函数の漸近挙動をエンコードするには粗すぎるのであった。そこで、特異点を膨らまし、函数の漸近挙動を分離しうる空間の導入が必須であった。このような観点から、まずい点への近づき方のデータを付与し、そこ上の函数としては漸近挙動を込めたものを考えるのが自然であるという立場に達した。これを、具体的に実現すべく空間概念を模索した結果、グロタンディーク位相での定式化への着想を得た。今後は、これをすすめてゆく。

（２）上記考察の副産物として、古典的接続問題の一つの高次元化への着想を得た。
前述の通り、特異点はそれ自身複雑な構造を有しており、この点自体が何らかの幾何学的構造を内包していると考えるべきである。この立場からすると、解の接続問題は、特異点近傍間をつなぐときの解の間の線形関係という観点から、特異点自身を結ぶときの特異点がもつ幾何学的構造をむすぶ関係の線形化であるという観点に切り替えることが可能となる。従来は、特異点そのものをさけ、その近傍で考えていた故の不自然さ、不自由さがあった。これらを整理することが可能となる。これは、高次元における接続問題に対し著しい簡約化を齎すことが期待される。事実、GKZ 超幾何函数の接続問題についての先行研究があるが、これは極めて高度なものであり、より古典との連絡の良い理論の存在が望ましい。ここへ道を拓くものと期待している。

（３）特異点が内包している幾何学的構造の対称性への考察の必要性を認識した。解析的データが十分反映されるように、特異点を膨らましたわけであるが、その為に特異点は幾何学的対称性を獲得することになる。これは、特異点そのものの基本群とでもいうべきものである。この基本群を調べることは当然ながら根源的問題であると思われる。古典的状況でも既に現れているように、漸近解の接続問題としてストークス現象がしられているが、まさにこれを反映するものとなっているはずである。これを突破口として、微分ガロワ理論への理解がより明確になるはずである。つまり、確定特異点型ではモノドロミー群（基本群）が稠密に入る代数群として微分ガロワ群があったのと同様に、ストークスデータが稠密に入る淡中群として微分ガロワ群が理解できるはずである。尚、高次のストークス構造というのも他社の研究において見出されつつあるが、これらの明確なる位置付けをうることが可能かもしれない。

（４）超平面配置の補空間の位相幾何学的考察に関してのある結果を得た。本研究の主題ど真ん中ではないが、関連の深いものとして超平面配置の補空間に関する位相幾何学がある。抑、射影空間上の確定特異点型の場合のベッチ構造とは、ほぼ超平面配置の補空間の位相幾何学である。
我々は、超平面配置の補空間について、そのホモロジー的構造をよく反映する、半代数的集合への分割を一般の場合に具体的に与えた。
ところが、この理論においては局所系係数すなわち、超幾何函数などの周期におけるベッチホモロジーの計算にはあまりうまく働かないことがわかっている。今後は、この点の改良を目指す。また、局所系係数のホモロジーに於いては共鳴問題というのがある。これは、大雑把にいうと、局所系が自明に近い場合の病理を解析せよというものである。超平面配置の補空間に於いては、いくつかの知見が得られているが十分とはいえない。これについて、我々が得た位相幾何学的知見から挑戦したい。
また、前述の接続問題の高次元化であるが、この接続問題のある意味組み合わせ論的還元は、この研究によって与えている空間の分割と極めて相性の良いものと思われる。そこで、ここでの知見及び（２）の知見を混ぜ合わせて、新たな理論を整備することは可能であろうと期待できる。この方向へ歩をすすめたい。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　３件）

① Ko-Ki Ito, Masahiko Yoshinaga, Semi-algebraic partition and basis of Borel-Moore homology of hyperplane arrangements, Proc. American Math. Soc. **140-6**(2012), 2065-2074 査読有
http://repository.kulib.kyoto-u.ac.jp/dspace/bitstream/2433/154579/1/S0002-9939-2011-11168-7.pdf

② Ko-Ki Ito, Twisted Poicaré Lemma and Twisted Čech-de Rham Isomorphism in case dimension=1, Kyoto Journal of Mathematics **50-1**(2010), 193-204　査読有
doi:10.1215/0023608X-2009-009

③ Ko-Ki Ito, The Elliptic Hypergeometric Functions Associated to the Configuration Space of Points on an Elliptic Curve I: Twisted Cycles, J. Math. Kyoto Univ. **49-4**(2009), 719-733　査読有
http://projecteuclid.org/DPubS/Repository/1.0/Disseminate?view=body&id=pdf_1&handle=euclid.kjm/1265899479

６．研究組織

(1)研究代表者

伊藤　公毅（ITO KOKI)
京都大学・数理解析研究所・研究員
研究者番号：30456842