

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 5 月 11 日現在

機関番号：10101

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2009～2011

課題番号：21700001

研究課題名（和文）標本化と最適再生核の数理

研究課題名（英文）Mathematical Properties of Sampling and Optimal Reproducing Kernels

研究代表者

田中 章 (TANAKA AKIRA)

北海道大学・大学院情報科学研究科・准教授

研究者番号：20332471

研究成果の概要（和文）：再生核ヒルベルト空間に対する標本化定理に関する理論的な解析を行った。具体的には、所与の再生核ヒルベルト空間と所与の標本点集合によって、当該再生核ヒルベルト空間に属する任意の関数が完全再構成可能となるための必要十分条件を与え、また完全再構成可能でない場合については誤差の上限を与えた。また、機械学習への適用を想定し、種々の再生核ヒルベルト空間の族に対して、標本点や採用する空間に対する解の挙動を理論的に解明した。

研究成果の概要（英文）：In this work, we theoretically analyzed properties of sampling theories for reproducing kernel Hilbert spaces (RKHS's). Our main contributions are 1) we gave a necessary and sufficient condition for a given RKHS and a given set of sampling points to satisfy the sampling theorem, 2) we gave an upper bound of errors in case that the sampling theorem does not hold, and 3) we clarified the behavior of the solution in various machine learning problems with respect to sampling points and an adopted RKHS.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2010年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2011年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：総合領域

科研費の分科・細目：情報学・情報学基礎

キーワード：情報数理，標本化定理，再生核ヒルベルト空間，機械学習

1. 研究開始当初の背景

いわゆるシャノンの標本化定理が、今日のデジタル信号処理の礎となっていることは周知の事実である。標本化に関する理論は、様々な拡張や一般化がなされたが、中でも特筆すべきは、1988年に東京工業大学の小川により発表された「一般標本化定理」の理論である。この理論の核心は、対象信号が何ら

かの再生核ヒルベルト空間の元であることを前提に、信号からの標本化という過程を、当該再生核ヒルベルト空間に対応する再生核(いわゆるカーネル関数)の再生性で表現し、標本点の情報から原信号を回復するという問題を、当該標本化過程の逆問題という形で定式化したことにある。この標本化過程は線形作用素であり、この線形系逆問題を解くことによって得られる最適解(すなわち被標本

化関数の推定値)は、推定対象である未知信号の、解空間への直交射影として与えられる。この理論によれば、例えばシャノンによる旧来の標本化定理は、「未知推定対象が、標本化関数(sinc 関数)に対応する再生核ヒルベルト空間(すなわち帯域制限関数全体からなる空間)に属しているならば、ナイキスト周波数による標本化過程に対する逆問題の解空間が、当該再生核空間と一致する」という、一般標本化定理の主張の、ごく特殊な一例として解釈することができる。

ところで、近年パターン認識や回帰推定、密度推定等に代表される、いわゆる機械学習の分野において、再生核を用いたカーネルトリックと呼ばれる技術が広く認知されるようになり、とりわけ応用面に関する研究が爆発的に発展したことは記憶に新しい。一方、応用面での発展とは裏腹に、その最適性や理論的妥当性の解明は置き去りにされている感が拭えなかった。それに対し、小川らの研究グループは、機械学習の問題が、前述の一般標本化定理の理論が扱う問題と本質的に同一であることを指摘し、この枠組による「射影学習」という概念を提唱した。この概念に基づく解釈により、カーネル関数が、未知の推定対象が属する空間を規定し、かつ、解空間への直交射影を与える際の計量をも規定するものとして、機械学習問題の定式化に内包されるのみならず、解の最適性に大きく影響を与えるものであることを理論的に明らかにした。この他にも、小川らは、いわゆる劣化信号の復元問題や、CT/MRI における像再構成問題等も全く同じ枠組で議論できることを示している。以上のように、一般標本化定理の理論は、標本化という一領域を俯瞰するのみならず、情報科学における広範な領域に対する大きなマイルストーンであると言える。

2. 研究の目的

上で述べたように、一般標本化定理に関わる理論により、標本化や機械学習、信号復元・再構成等の様々な分野の問題が統一的に解釈できるようになり、かつ、その中で再生核が担う、解の最適性の機序が明らかになった。一方、当該知見の現実問題への適用を考えた場合に、以下に示すような大きな課題が残る。

- (1) 機械学習問題のように、モデル(すなわち再生核ヒルベルト空間そのもの)を選択しなくてはならないような問題に対して、具体的にそれを選択する理論が確立されていない。
- (2) 未知の推定対象が、仮定した再生核に対応する再生核ヒルベルト空間に属してい

ることが理論の大前提であるが、実際問題において、それを観測(すなわち標本化後の信号)のみから確認する理論が確立されていない。

本研究では、これらの課題の解明を目標とする。この実現は、標本化定理のみならず、機械学習理論や信号復元・再構成問題等、一般標本化定理に関わる理論の、実用への向けての大きなブレークスルーとなると期待できる。

3. 研究の方法

本研究の目標を完遂することとは、すなわち「研究目的」の項で述べた課題を、数学的な定理を証明するという形で決着させることである。これを実現するために実行可能なことは、効果的に情報を収集すること以外にない。研究期間中は、学術的な会議における情報収集や他機関の研究者との研究討論を通じて効果的に情報を収集し、目標の完遂を目指す。

4. 研究成果

本研究では、再生核ヒルベルト空間にかかる関数推定という主題に関連し、主に以下のような成果を得た。

- (1) 所与の再生核ヒルベルト空間に属する任意の関数が所与の標本点集合によって完全再構成可能となる(すなわち標本化定理が存在する)ための必要十分条件を与えた。また、完全再構成可能でない場合についても、誤差の上限を明らかにした。
- (2) 先行研究において、不変な計量を有する再生核ヒルベルト空間の族の中で、未知推定対象を含む最小の再生核ヒルベルト空間が最も良いモデルを与えることを理論的に解明したが、雑音の分散については逆の挙動、すなわち広い空間を採用した方が、分散が小さくなることを理論的に解明した。また、このような性質は必ずしも不変な計量を有しない族については成立しないことも理論的に明らかにした。更に、不変な計量という性質について更に理論的に追求し、それが関数空間の直交性や背反性と同値であることを解明した。
- (3) 固定した再生核ヒルベルト空間における関数推定問題において、雑音が存在する場合、一般的な状況下では、標本点数を増加させることにより、推定結果における雑音の分散が増加することを理論的に明らかにした。

本研究課題には直接関連しないものの、課題の遂行に間接的に有用な知見として、以下のような成果を得た。

- (1) ある種の対称行列の族がある固定したユニタリ行列で対角化できるための必要十分条件を解明し、その応用として、信号及び雑音の相関行列を精度良く推定し、より高精度に未知信号を推定する手法を与えた。
- (2) 欠損のあるデータに対する欠損値推定の問題に関して、理想的な状況では、期待二乗誤差最小の意味での最適解が古典的なウィナーフィルタであることを指摘するとともに、相関行列に誤差がある場合でも当該性質が成立する十分条件を与えた。
- (3) 観測が未知であるような線形方程式において、観測が何らかの二次制約を満たす場合に対する理論的な解析を行うとともに、解を求めるアルゴリズムを構築した。
- (4) 行列の部分同時対角化という線形代数における新たな技法を開発するとともに、その応用として、コンピュータビジョンにおける3次元形状復元の推定精度の向上を図った。
- (5) 非負値行列分解において、基底ベクトルの一部が事前知識として利用可能である場合、当該知識を利用することにより推定精度を向上させる手法を開発した。
- (6) 線形推定理論、及び、データベースを利用することにより、JPEG画像の画質改善を実現する手法を開発した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 8 件)

- ①河野克也, 田中章, “画像データベースとJPEG再適用を利用したJPEG画像の画質改善”, 電子情報通信学会技術報告, 回路とシステム, Vol.111, No.465, pp.13-18, 2012, 査読無
- ②滝沢篤史, 田中章, 宮腰政明, “自己校正法における射影変換の推定精度の向上”, 電子情報通信学会技術報告信号処理, Vol.110, No.440, pp.229-233, 2011, 査読無
- ③武井亨, 田中章, 宮腰政明, “カーネルリッジ回帰における低計算量モデル選択法”, 電子情報通信学会技術研究報告, 信号処理, Vol.110, No.440, pp.185-190, 2011, 査読無
- ④天野雄太, 田中章, 宮腰政明, “既知の基底ベクトルを考慮したNMF”, 電子情報通信学会技術研究報告, 信号処理, Vol.110, No.4

40, pp.137-141, 2011, 査読無

- ⑤田中章, 小川貴弘, 長谷山美紀, 宮腰政明, “固有空間BPLP法の補間精度に関する解析”, 電子情報通信学会論文誌A, Vol.J94-A, No.2, pp.116-126, 2011, 査読有
- ⑥A. Tanaka, H. Imai, and M. Miyakoshi, “Kernel-Induced Sampling Theorem”, IEEE Transactions on Signal Processing, Vol.58, No.7, pp.3569-3577, 2010, 査読有
- ⑦今井英幸, 田中章, 池田盛一, “カーネル法を用いた回帰分析の予測精度について”, 電子情報通信学会技術研究報告, パターン認識・メディア理解, Vol.109, No.344, pp.61-64, 2009, 査読無
- ⑧工藤峰一, 今井英幸, 田中章, 杉山将, “パターン認識における都市伝説”, 電子情報通信学会技術研究報告, パターン認識・メディア理解, Vol.109, No.344, pp.29-34, 2009, 査読無

[学会発表] (計 11 件)

- ①A. Tanaka, H. Imai, and K. Takamiya, “Variance Analyses for Kernel Regressors with Nested Reproducing Kernel Hilbert Spaces”, 2012 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP2012), 2012年3月28日, 国立京都国際会館 (京都)
- ②Y. Amano, A. Tanaka, and M. Miyakoshi, “Non-negative Matrix Factorization Considering Given Vectors in a Basis”, 2011 IEEE International Conference on Granular Computing (GrC2011), 2011年1月8日, Garden Villa Hotel (台湾)
- ③A. Takizawa, A. Tanaka, and M. Miyakoshi, “Performance Improvement of Metric Reconstruction Based on Partial Joint Diagonalization”, 2011 IEEE International Conference on Granular Computing (GrC2011), 2011年11月8日, Garden Villa Hotel (台湾)
- ④A. Tanaka, H. Imai, M. Kudo, and M. Miyakoshi, “Theoretical Analyses on a Class of Nested RKHS's”, 2011 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP2011), 2011年5月25日, Prague Congress Center (チェコ)
- ⑤田中章, 宮腰政明, “一般標本化定理における最良近似関数の誤差解析” 日本音響学会2010年秋季研究発表会, 2010年9月16日, 関西大学 (大阪)
- ⑥A. Tanaka, M. Miyakoshi, “Analyses on Kernel-Specific Generalization Ability for Kernel Regressors”, 10th International Symposium on Signal Processing and

Information Technology (ISSPIT2010),
2010年12月16日, Hotel Steinberger Nile
Palace (エジプト)

⑦ A. Tanaka, H. Imai, M. Kudo, and M.
Miyakoshi, “A Relationship Between
Generalization Error and Training
Samples in Kernel Regressors”, 20th
International Conference on Pattern
Recognition (ICPR2010), 2010年8月24日,
Istanbul Convention & Exhibition Centre
(トルコ)

⑧ 田中章, 今井英幸, 宮腰政明, “再生核ヒル
ベルト空間における標本化定理”, 第24回信
号処理シンポジウム, 2009年11月25日, 鹿
児島サンロイヤルホテル (鹿児島)

⑨ A. Tanaka, M. Miyakoshi, “Theoretical
Analyses for a Class of Kernels with an
Invariant Metric”, 2010 IEEE
International Conference on Acoustics,
Speech, and Signal Processing, 2010年3月
17日, Sheraton Dallas Hotel (米国)

⑩ A. Tanaka, M. Miyakoshi, N. Ono,
“Analysis on Blind Decorrelation of
Isotropic Noise Correlation Matrices Based
on Symmetric Decomposition”, IEEE
Statistical Signal Processing Workshop
2009, 2009年9月2日, Cardiff University
(英国)

⑪ A. Tanaka, M. Miyakoshi, “Joint
Estimation of Signal and Noise Correlation
Matrices and Its Application to Inverse
Filtering”, 2009 IEEE International
Conference on Acoustics, Speech, and
Signal Processing (ICASSP2009), 2009年4
月21日, Taipei International Convention
Center (台湾)

〔図書〕 (計 0 件)

〔産業財産権〕

○出願状況 (計 0 件)

○取得状況 (計 0 件)

〔その他〕

ホームページ等

なし.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

田中 章 (TANAKA AKIRA)

北海道大学・大学院情報科学研究科・准教授
研究者番号：20332471