

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 5 月 25 日現在

機関番号：14301

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2009～2011

課題番号：21710151

研究課題名（和文）待ち行列モデルと保険リスク評価モデルにおける希少事象確率の理論的評価  
 研究課題名（英文）Theoretical estimation of rare event probabilities in queueing and insurance risk models

研究代表者

増山 博之（MASUYAMA HIROYUKI）

京都大学・大学院情報学研究科・助教

研究者番号：60378833

研究成果の概要（和文）：本研究課題では、待ち行列モデルと保険リスク評価モデルにおける希少事象確率の理論的評価に向け、反射壁をもつマルコフ加法過程の定常分布と、重裾ランダム時刻で抽出された累積過程の裾確率の漸近解析を行った。その結果、既知の漸近公式に関する成立条件の緩和、および新しい漸近公式の導出に成功した。また、先行研究で示されているいくつかの漸近公式に誤りがあることも指摘した。

研究成果の概要（英文）：The goal of this research project is the theoretical estimation of rare event probabilities in queueing and insurance risk models. To achieve the goal, we studied the asymptotics for the stationary distributions of Markov additive processes with reflecting barriers and for the tail probabilities of cumulative processes sampled at heavy-tailed random times. As a result, we relaxed the conditions on some existing asymptotic formulas and derived new asymptotic formulas. Furthermore, we found out that some asymptotic formulas in the literature are incorrect.

交付決定額

（金額単位：円）

|         | 直接経費      | 間接経費      | 合計        |
|---------|-----------|-----------|-----------|
| 2009 年度 | 1,200,000 | 360,000   | 1,560,000 |
| 2010 年度 | 1,100,000 | 330,000   | 1,430,000 |
| 2011 年度 | 1,100,000 | 330,000   | 1,430,000 |
| 年度      |           |           |           |
| 年度      |           |           |           |
| 総計      | 3,400,000 | 1,020,000 | 4,420,000 |

研究分野：複合新領域

科研費の分科・細目：社会・安全システム科学・社会システム工学・安全システム

キーワード：待ち行列, 集合的リスク, マルコフ加法過程, 累積過程, 希少事象確率, 漸近解析

## 1. 研究開始当初の背景

情報通信システム, 生産システム, 交通システム, キャッシュフローシステムなど, 我々の社会に存在する様々なシステムの「リスク」を考えるとすることは、「希少事象」を考えることに他ならない。なぜなら, システ

ムの設計者にとって好ましくない事象が「高頻度で起こる」ことがわかっている場合には, そもそもシステムの設計を根本から考え直す必要があり, その好ましくない事象は真の意味での「リスク」ではない。したがって, 真の意味での「リスク」とは「希に発生する

好ましくない事象」, すなわち「希少事象」であり, リスクの評価とは「希少事象確率」の評価だと言うことができる.

本研究では, 情報通信システムの基本的な数理モデルである待ち行列モデルと, Cramer-Lundberg モデルや集合的リスクモデルなどの保険リスク評価モデルにおける希少事象確率を対象とする.

専門家の間ではよく知られていることであるが, 待ち行列モデルと保険リスク評価モデル, それぞれの希少事象確率に対する解析手法は密接に関係している. 例えば, Cramer-Lundberg モデルの破産確率は, 定常な GI/GI/1 待ち行列の待ち時間分布の裾確率として表現できる. さらに, 定常な GI/GI/1 待ち行列の系内客数分布は, 任意客の系内滞在時間における累積到着数分布に等しい. このことから, 定常な GI/GI/1 待ち行列の系内客数分布の解析は, 累積到着過程を系内滞在時間分布にしたがうランダム時点抽出 (sampling) という問題, すなわち, 「累積過程のランダム抽出」に帰着することができる. また, 「累積過程のランダム抽出」は「確率変数のランダム和」を扱う集合的リスクモデルを特別な場合として含む.

ところで, マルコフ的な環境をもつ多くの待ち行列モデルは, GI/G/1 型マルコフ連鎖という反射壁をもつマルコフ加法過程に帰着できる. しかしながら, 一般に GI/G/1 型マルコフ連鎖の定常分布の陽表現を得ることは難しく, また, 計算機で数値的に求めるのも容易ではない. そのため, 定常分布の裾漸近特性や重負荷極限などの「部分的な情報」に絞り, その解析的な表現を得ようとする研究が注目を集めている. しかしながら, 先行研究で示された漸近公式の成立条件には不備や冗長さが散見され, まだ十分に研究がなされているとは言えない.

また, 詳細は割愛するが, マルコフ的な環境をもつ待ち行列モデルを GI/G/1 型マルコフ連鎖に帰着し, その定常分布の漸近公式を導出するには, 「累積過程のランダム抽出」に関する漸近解析結果が必要となる. しかし, 特別な場合である「確率変数のランダム和」に関する研究はこれまでに数多くなされているが, 研究代表者の知る限り, 一般的な「累積過程のランダム抽出」の枠組みで行われた研究はほとんどない. したがって, 「確率変数のランダム和」に関する理論的な結果を「累積過程のランダム抽出」へと拡張することができれば, 待ち行列モデルへの応用が広がる.

## 2. 研究の目的

本研究の目的は, 待ち行列モデルと保険リスク評価モデルにおける希少事象確率の理論的評価に向けて, 反射壁をもつマルコフ加法過程の定常分布, および, 重裾ランダム時刻で抽出された累積過程の漸近解析を行うことである. 詳細は以下に述べる.

### (1) 反射壁をもつマルコフ加法過程の定常分布の漸近解析

反射壁をもつ代表的なマルコフ加法過程である GI/G/1 型マルコフ連鎖を対象とし, その定常分布の裾確率 (以下, 「定常裾確率」と呼ぶ) に関する漸近解析と, 定常分布の重負荷極限解析を行う.

#### ① 裾漸近解析

定常裾確率の漸近特性に関する研究は, 軽裾 (light-tailed) 漸近解析と劣指数漸近解析に分けられる. そして, どちらの場合でも, 先行研究のほとんどは, 加法成分の増分分布の周期  $\tau$  を 1 と仮定している. 実際のシステムを考えると, 周期  $\tau$  が 2 以上になることはほとんどないとする向きもあるが, この考え方には危うさがあることは否めない.

そこで, 本研究では, 加法成分の増分分布の周期  $\tau$  が定常裾確率の軽裾・劣指数漸近特性に与える影響を精査し, 周期  $\tau$  に関して統一的な漸近公式を導出する.

また, 先行研究で示されている漸近公式の中には根本的に間違っているものや, 冗長な仮定が課せられているものがある. 丁寧な理論解析を行うことによって, より緩い条件のもとで正しい漸近公式を示し, 「安心して使える道具」を一つでも多く増やしたい.

#### ② 重負荷極限解析

一般に, トラフィック強度が 1 に近づくにつれ, 待ち行列モデルの性能指標の数値計算コストは爆発的に増大し, 精度の高い結果を得るのは極めて困難となる. したがって, 解析的な表現をもつ重負荷極限公式が手に入れば, それは近似公式としての利用が期待される.

GI/G/1 型マルコフ連鎖の重負荷極限に関する先行研究では, 汎関数中心極限定理を用いて重負荷極限公式が示されているが, 「加法成分の増分の 3 次モーメントが有限である」という冗長な条件が仮定されている. 本研究では, 特性関数を用いた複素解析と行列解析を行うことで, より緩い条件のもとで重負荷極限公式を示す.

(2) 重裾ランダム時点で抽出された累積過程の漸近解析

累積過程を  $B(t)$ , 抽出時刻を  $T$  (確率変数) とする。「1. 研究開始当初の背景」で述べたように,  $B(T)$  の解析は待ち行列モデルや保険リスク評価モデルの解析に深く関わる. 本研究項目での目的は, 裾確率  $\Pr(B(T) > x)$  の漸近解析を行い, 待ち行列モデルや集合的リスクモデルへの応用に資する理論的な結果を得ることである.

近年, 主に「確率変数のランダム和」の枠組みではあるが, 抽出時刻  $T$  の裾が重い場合に関する研究が盛んに行われ, 興味深い結果がいくつか報告されている. なかでも, 注目すべき結果として,  $x \rightarrow \infty$  の極限で成立する単純な漸近公式  $\Pr(B(T) > bx) \sim \Pr(T > x)$  ( $b$  は陽に定まる定数) がある. この漸近公式は, 「 $T$  が  $B(t)$  と独立でかつ  $T$  の平方根が長裾的である」という基本的な仮定と, いくつかの付加的な条件のもとで示されている.

本研究ではより一般的な待ち行列モデルや集合的リスクモデルへの応用に向け, 上記の漸近公式に関する成立条件の緩和や, 新しい漸近公式の導出などに取り組む.

### 3. 研究の方法

(1) 反射壁をもつマルコフ加法過程の定常分布の漸近解析

#### ① 軽裾漸近解析

まず, 定常分布の裾確率に関する幾何漸近公式を導出するのに必要な数学的道具を用意する. 漸近公式の導出には, よく知られた母関数の逆変換公式を用いる. ただし, 定常裾確率を漸近展開したとき, 主項の prefactor の系列が常に非負で, かつ, 上極限が厳密に正でなければ漸近公式として意味がない. そこで, これを保証するための道具として, クロネッカーの近似定理や第 1 種チェビシェフ多項式などを用い, 母関数の逆変換公式を強化する(以下, この強化された逆変換公式を「本逆変換公式」という). なお, 加法成分の増分分布が周期をもつ場合には, 本逆変換公式によって導かれる漸近公式は, 異なる手法によって示された既知の漸近公式より単純な表現をもつことが期待される.

次に, 本逆変換公式を用いて, 加法成分の下向きの変化量が高々 1 に制限された GI/G/1 型マルコフ連鎖(「M/G/1 型マルコフ連鎖」と呼ばれる)の定常裾確率の幾何漸近公式を導出する. 加法成分に課せられた制約のおかげで, M/G/1 型マルコフ連鎖の解析的な取り扱い, 一般的な GI/G/1 型マルコフ連鎖と比べて格

段に容易となる. なお, この M/G/1 型マルコフ連鎖に対して一定の成果が得られた後は, GI/G/1 型マルコフ連鎖への拡張を試みる.

#### ② 劣指数漸近解析

①と同様に, まず, M/G/1 型マルコフ連鎖について考える. 先行研究では加法成分の増分分布の周期  $\tau$  が 1 であること暗黙のうちに仮定し, 定常裾確率の劣指数漸近公式を導出している. 本研究では, 増分分布の周期  $\tau$  と, 定常分布の行列積表現に深く関わる  $G$  行列の周期との関係を用いて, 周期  $\tau$  が定常分布の劣指数漸近特性に及ぼす影響を解明し, 劣指数漸近公式の成立条件の緩和につなげる.

なお, M/G/1 型マルコフ連鎖に対する劣指数漸近解析が順調に進んだ暁には, GI/G/1 型マルコフ連鎖への拡張に取り組む. 一般的な GI/G/1 型マルコフ連鎖では, 定常分布の行列積表現は,  $G$  行列の無限列によって特徴付けられ, その行列母関数に付随したある方程式の解の配置と, 加法成分の増分分布の周期  $\tau$  との間には密接な関係がある. この関係性を利用し, M/G/1 型マルコフ連鎖に対する漸近解析結果を一般化する.

#### ③ 重負荷極限解析

まず, 重負荷極限を実現するためのパラメータ  $\alpha$  を導入する. もう少し具体的に言えば,  $\alpha \downarrow 0$  としたときに, GI/G/1 型マルコフ連鎖の加法成分のドリフトが下から 0 に漸近するように, GI/G/1 型マルコフ連鎖をパラメタライズする. 続いて, 加法成分の増分分布に関する RG 分解や行列解析を駆使し, 定常分布の特性関数に対して  $\alpha \downarrow 0$  とする極限をとる. この手法によれば, 先行研究より緩い条件のもとで, GI/G/1 型マルコフ連鎖に関する重負荷極限公式が得られると期待される.

(2) 重裾ランダム時刻で抽出された累積過程の漸近解析

#### ① 非独立抽出

抽出時刻  $T$  が累積過程  $B(t)$  と独立ではない「非独立抽出」の場合を考える. 準備として, 累積過程の偏差の下界値に関する左裾確率の評価不等式を示す. 得られた評価不等式と, 偏差の上界値の右裾確率に関する既知の評価不等式を用いて, 漸近公式  $\Pr(B(T) > bx) \sim \Pr(T > x)$  を示す.

#### ② 独立抽出

裾の長い分布(裾の重い分布族に含まれる)に対して, 裾の長さを表す次数という概念と, それに関連した分布族を導入することで, 新しい大偏差理論を構築し, 既存の漸近公式  $\Pr(B(T) > bx) \sim \Pr(T > x)$  が成立するための

条件を緩和する。さらに、この漸近公式の必要条件である「抽出時刻  $T$  が 2 次長裾的である」が成立しない場合を考え、新しい漸近公式の導出を目指す。その際、裾確率  $\Pr(B(T) > x)$  に対する (正確な) 漸近公式の導出が困難であれば、代わりに漸近不等式の導出を試みる。

#### 4. 研究成果

##### (1) GI/G/1 型マルコフ連鎖の劣指数漸近解析

まず、GI/G/1 型マルコフ連鎖の特別な場合である M/G/1 型マルコフ連鎖を考え、その定常分布が劣指数漸近特性を持つための既知の十分条件を緩和することに成功した。この成果をまとめた論文は海外英文誌に掲載された [P2]。なお、この論文では、先行研究で示されているいくつかの漸近公式が根本的に間違っていることも指摘している。

続いて、一般的な GI/G/1 型マルコフ連鎖を考え、定常分布の劣指数漸近特性が加法成分の増分分布の周期に依存しないことを示した。さらに、非境界での背後過程の状態遷移が閉じていない場合では、それが閉じている場合と比べて、定常分布の裾減衰が速いことも示した。これらの研究成果をまとめた論文は海外英文誌に投稿中である。

##### (2) GI/G/1 型マルコフ連鎖の軽裾漸近解析

「3. 研究の方法 (1)-①」で述べたように、母関数に対する逆変換公式を強化した。さらに、その結果を用いて、加法成分の増分分布が周期的な場合や、増分分布の母関数の収束半径が定常裾確率の減衰率を決める場合など、先行研究ではあまり考慮されていなかった条件のもとで、M/G/1 型マルコフ連鎖の定常分布に関する漸近公式を導出した。これらの研究成果をまとめた論文は海外英文誌に掲載された [P3]。なお、一般的な GI/G/1 型マルコフ連鎖への拡張については、本成果報告書作成時点では完遂していないが、これまでに得られた結果を、国内研究集会で発表した [T5]。

##### (3) GI/G/1 型マルコフ連鎖の重負荷極限解析

特性関数を用いた複素解析と行列解析を駆使することで、「適切にスケール変換された加法成分の定常分布が重負荷極限において指数分布に収束する」という重負荷極限公式を、既知の条件よりも緩い「加法成分の増分の 2 次モーメントが有限である」という条件のもとで示した。この成果については、国内研究集会で発表し [T2]、さらに、2012 年 1 月に海外英文誌のオンライン版に論文が掲載

された [P1]。

##### (4) 重裾ランダム時刻で抽出された累積過程の漸近解析

抽出時刻  $T$  が累積過程と独立ではない場合に対し、 $T$  が 3 次長裾的であるという仮定のもとで、漸近公式  $\Pr(B(T) > bx) \sim \Pr(T > x)$  を示した。一方、抽出時刻  $T$  が累積過程と独立な場合に対しては、既知の漸近公式  $\Pr(B(T) > bx) \sim \Pr(T > x)$  を少し拡張し、その結果と M/G/1 型マルコフ連鎖に関する劣指数漸近公式とを用いて、BMAP/GI/1 待ち行列における系内客数分布と待ち時間分布に関する劣指数漸近公式を導いた。この研究成果は、国内の英文誌に掲載された [P5]。

##### (5) その他の関連研究

① インターネット・トラフィックモデリング  
M/G/1 型マルコフ連鎖の劣指数漸近公式を用いて、集団 on-off 過程と固定長サービスを入力とする単一サーバ・有限バッファ待ち行列のロス率と、到着過程の on 期間長分布との間に成立する漸近的な関係を示した。また、その関係性を利用して、トラフィックデータに基づく集団 on-off 過程のパラメータ決定法について検討を行った。また、関連する内容として、非線形計画問題による拡張型 DAR(1) のパラメータ決定法についても研究を行った。これらの研究成果は共に国内学会にて発表した [T1, T7, T8]。

② マルチクラス待ち行列モデルの漸近解析  
「3. 研究の方法 (1)-①」で述べた母関数に対する逆変換公式を用い、マルチクラス M/G/1 待ち行列の結合系内客数分布に関する軽裾漸近公式を導いた。この研究成果は国内学会 [T6]、および国際会議で発表した [T4]。また、マルチクラス M/G/1 待ち行列に関する重負荷極限解析を行い、その結果を国内学会で発表した [T3]。

③ 再試行型待ち行列モデルの解析  
コールセンターの基本的な数理モデルである再試行型 M/M/c/c 待ち行列モデルは、マルコフ加法過程の一種であるレベル依存型準出生死滅過程に帰着され、応用上利用しやすい解析結果を得るのは困難とされている。この問題に対し、サーバ数  $c$  が 3 または 4 という特別な場合には、連分数を用いた定常分布の解析表現を導出し、一般の場合には、行列連分数による数値計算アルゴリズムを開発した。これらの成果は国際会議で発表した後 [T9, T10]、海外英文誌に掲載された [P4, P6]。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計6件) ※全て査読あり

[P1] Tatsuaki Kimura, Hiroyuki Masuyama and Yutaka Takahashi, ``Heavy-Traffic Asymptotics for Stationary GI/G/1-Type Markov Chains," *Operations Research Letters*, vol. 40, no. 3, pp. 185-189, 2012. doi:10.1016/j.orl.2012.01.001

[P2] Hiroyuki Masuyama, ``Subexponential Asymptotics of the Stationary Distributions of M/G/1-Type Markov Chains," *European Journal of Operational Research*, vol. 213, no. 3, pp. 509-516, 2011.

doi:10.1016/j.ejor.2011.03.038

[P3] Tatsuaki Kimura, Kentaro Daikoku, Hiroyuki Masuyama and Yutaka Takahashi, ``Light-Tailed Asymptotics of Stationary Tail Probability Vectors of Markov Chains of M/G/1 Type, Stochastic Models," vol. 26, no. 4, pp. 505-548, 2010. doi:10.1080/15326349.2010.519661

[P4] Tuan Phung-Duc, Hiroyuki Masuyama, Shoji Kasahara and Yutaka Takahashi, ``State-Dependent M/M/c/c+r Retrial Queues with Bernoulli Abandonment," *Journal of Industrial and Management Optimization*, vol. 6, no. 3, pp. 517-540, 2010.

doi:10.3934/jimo.2010.6.517

[P5] Hiroyuki Masuyama, Bin Liu and Tetsuya Takine, ``Subexponential Asymptotics of the BMAP/GI/1 Queue," *Journal of the Operations Research Society of Japan*, vol. 52, no. 4, pp. 377-401, 2009.

<http://ci.nii.ac.jp/naid/110007502455>

[P6] Tuan Phung-Duc, Hiroyuki Masuyama, Shoji Kasahara and Yutaka Takahashi, ``M/M/3/3 and M/M/4/4 Retrial Queues," *Journal of Industrial and Management Optimization*, vol. 5, no. 3, pp. 431-451, 2009.

doi:10.3934/jimo.2009.5.431

[学会発表] (計10件)

[T1] 原 健三, 増山 博之, 笠原 正治, 高橋

豊, ``集団on-off 到着過程によるインターネットトラフィック同定法の検討," 電子情報通信学会技術研究報告 (NS2011-250), pp. 397-402, 宮崎シーガイア, 2012/03/08-09.

[T2] 木村 達明, 増山 博之, 高橋 豊, ``Heavy-Traffic Asymptotics for Stationary GI/G/1-Type Markov Chains," 第30回待ち行列シンポジウム「確率モデルとその応用」, pp. 89-97, 静岡県浜松市, 2012/01/18-20.

[T3] 原 健三, 増山 博之, 高橋 豊, ``マルチクラスM/G/1 待ち行列の重負荷極限," 日本OR学会 研究部会「OR横断若手の会」主催「若手研究交流会 2011」, 琵琶湖コンファレンスセンター, 2011/8/29-31.

[T4] Kenzo Hara, Hiroyuki Masuyama, Yutaka Takahashi, ``Light-Tailed Asymptotics of the Joint Queue Length Distribution of a Multiclass M/G/1 Queue with the FCFS Service Discipline," IFORS2011, Melbourne, Australia, July 10-15, 2011.

[T5] 木村 達明, 増山 博之, 高橋 豊, ``Tail Asymptotics of GI/G/1-Type Markov Chains," 第227回 待ち行列研究部会, 京大東京オフィス, 2011/05/21.

[T6] 原 健三, 増山 博之, 高橋 豊, ``先着順型マルチクラスM/G/1 待ち行列の軽裾漸近公式," 日本OR学会研究部会「OR横断若手の会」第5回研究会, 京都大学, 2011/04/16.

[T7] 吉原 千尋, 増山 博之, 笠原 正治, 高橋 豊, ``拡張型DAR(1)のパラメータフィッティング手法とネットワークトラフィックモデリングへの応用," 電子情報通信学会技術研究報告 (NS2010-283), pp. 681-686, 沖縄コンベンションセンター, 2011/03/03-04.

[T8] 吉原 千尋, 増山 博之, 笠原 正治, 高橋 豊, ``拡張型DAR(1)のパラメータ決定法-非線形計画問題としてのアプローチ-, 日本OR学会 2010 年秋季研究発表会, 福島県福島市, 2010/09/16-17.

[T9] Tuan Phung-Duc, Hiroyuki Masuyama, Shoji Kasahara and Yutaka Takahashi, ``A Simple Algorithm for the Rate Matrices of Level-Dependent QBD Processes," In Proc. The 5th International Conference on Queueing Theory and Network Applications (QTNA2010), J. Wang, W. Yue, Y. Takahashi (eds.), Beijing, China, July 24-26, 2010. pp. 71-77.

[T10] Tuan Phung-Duc, Hiroyuki Masuyama,  
Shoji Kasahara and Yutaka Takahashi,  
"Analytical Solutions for  
State-Dependent M/M/c/c+r Retrial Queues  
with Bernoulli Abandonment," The 4th  
International Conference on Queueing  
Theory and Network Applications  
(QTNA2009), Singapore, June 29-31, 2009.

[その他]

ホームページ等

<http://infosys.sys.i.kyoto-u.ac.jp/~masuyama/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

増山 博之 (MASUYAMA HIROYUKI)

京都大学・大学院情報学研究科・助教

研究者番号：60378833