様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成　24　年　5　月　　11 日現在

機関番号：11301
研究種目：若手研究（B）
研究期間：2009　～　2011
課題番号：21740009
研究課題名（和文）　Ｐ進Ｌ関数とＰ進ベイリンソン予想

研究課題名（英文）　P-adic L-function and P-adic Beilinson conjecture

研究代表者
小林　真一（KOBAYASHI SHINICHI）
東北大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：80362226

研究成果の概要（和文）：
有理数体上定義された楕円曲線に付随する p 進 L 関数を研究した。特に楕円曲線の p 進 Gross-Zagier 公式を超特異な素点 p に対して証明した。これは Heegner 条件をみたす虚２次体 K 上に base change した p 進 L 関数の微分値を，K に付随する Heegner 点の p 進高さで記述するものである．応用として強い Birch and Swinnerton-Dyer 予想を階数１の CM 楕円曲線に対して悪い素点を除き証明した。またこの公式は p 進ベイリンソン予想の重要な例を与えるものである．

研究成果の概要（英文）： I studied the p-adic L-function of elliptic curves defined over the rational number field. I obtained the p-adic Gross-Zagier formula at supersingular prime p that describes the derivative of the p-adic L-function of elliptic curves base changed over an imaginary quadratic field satisfying the Heegner condition in terms of the p-adic height of the Heegner point. As an application, I proved the full Birch and Swinnerton-Dyer conjecture for CM elliptic curves of rank 1 up to bad primes.
This formula also gives an important example of the p-adic Beilinson conjecture.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2009 年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2010 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2011 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総　計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：　数物系科学
科研費の分科・細目：　数学・代数学
キーワード：　ゼータ関数，岩澤理論，p-進 L-関数，p 進 Beilinson 予想，Birch and Swinnerton-Dyer 予想，楕円曲線，整数論

１．研究開始当初の背景

p 進 Beilinson 予想は B. Perrin-Riou によって 1990 年代半ばに定式化されたものである．内容は一般のモーチフに対して，円分 p 進 L 関数の補間式を予想するものである．この種の予想は Coates-Perrin-Riou などによって古くからあったのだが，新しい点は次の事である．
(1) critical な点だけでなく，non-critical な点での補間式も予想している．
(2)　central point における微分値も予想し

ている.
(3) 素数 p は ordinary でなくてもよい.
この予想は, Beilinson 予想や, 複素や p-進の Birch and Swinnerton-Dyer 予想も特別な場合として含む巨大で深いものであり, 実質的に知られていることはほとんどないといってよい. Kubota-Leopoldt の p 進 L 関数の場合は, Perrin-Riou 自身などによって研究されており, 虚数乗法をもつ楕円曲線に関しては円分でない p 進 L 関数に関して, かなり部分的ではあるが, (1)に関連する結果が得られている. 特に後者に関しては坂内健一氏や辻雄氏らと共同で研究を行ってきた. (2)に関しては, Perrin-Riou や Nekovar による楕円保型形式の ordinary な素数における p 進 Gross-Zagier 公式が知られている唯一のものであった. (円分でない方向ならば Bertolini や Darmon などの結果がある.)
(3)に関しては, p 進 Beilinson 予想の定式化において, ordinary のときには見えなかった p 進 de Rham cohomology の Hodge filtration の splitting の選択の問題がある. この問題に関しては理論的な整合性に関する結果はあるものの, 知られている非自明な事実はなかった.

２．研究の目的

楕円曲線や虚数乗法をもつアーベル多様体, 代数曲線などに対して p 進 Beilinson 予想の例を増やすこと, 理解を深めることが主要目的である.
具体的には１の(1)に関しては Polylogarithm などを使って計算することを目的としている. (2)に関しては楕円曲線の場合は p 進 Birch and Swinnerton-Dyer 予想と同値になる. これは p 進高さ関数や p 進 Gross-Zagier 公式などの研究, とくに(3)との兼ね合いで non-ordinary な素数の場合に研究を行い, oridinary のときとの違い, とくに p 進 de Rham cohomology の Hodge filtration の splitting の選択の問題がどのように関連してくるのか調べることが目的となる.

３．研究の方法

本研究は純粋数学の理論的研究であるため, 特別な実験装置などは必要なく, 十分な時間をかけてじっくり考え抜くのが基本的な研究方法である. そのためには不要な事務仕事などを減らし, 研究時間を十分確保するよう努めることがもっとも大切である.
様々な背景をもつ研究者と直接交流して議論することは, 研究を進めていく上で, 非常に有効である. そのため研究集会への参加や研究者の招聘, 研究連絡を積極的に行った.
また既存あるいは新規の文献から学ぶことも大変重要である。研究図書を購入しその中から必要な知識や着想を見いだすことができる.

４．研究成果

１の(1)に関しては, 前年度からの続きである坂内健一氏との共同研究(下記の 1 の論文)および坂内健一氏と辻雄氏との共同研究(下記の 2 の論文)をまとめて出版した. 1 の論文では, Eisenstein-Kronecker 数という数を定義した. これは Kronecker double series あるいは Eisenstein-Kronecker-Lerch series と呼ばれる重要な級数の特殊値である. この数は楕円曲線の Poincare bundle に付随する canonical な theta 関数を母関数としてもつことを発見した. そしてこの発見をもとに, 虚数乗法をもつ楕円曲線の ordinary な素数における２変数 p 進 L 関数を研究したのが主要内容である. これは Katz や Yager などの研究手法とはことなるアプローチであり, elliptic Polylogarithm などとの関係をより導きやすいものである. そしてこの論文の結果をもとにして虚数乗法をもつ楕円曲線の elliptic Polylogarithm を研究したのが 2 の論文の内容である. 2 の論文では non-ordinary な素数も扱っている.
１の(2), (3)に関連して, 楕円曲線の non-ordinary な素数における p 進 Gross-Zagier 公式を証明し, 論文としてまとめた(下記の 4 の論文). E を有理数体上定義された楕円曲線とし, K を Heegner 条件をみたす虚２次体とする. このとき E を K 上に base change した楕円曲線の p 進 L 関数を考える. p 進 Gross-Zagier 公式は, この p 進 L 関数の微分値を, K から定まる Heegner 点の p 進高さで記述するものである.
この公式は微分値の leading term を記述する強い Birch and Swinnerton-Dyer 予想への応用がある. 実際応用として次のものを得た. E が虚数乗法をもち, E の(有理数体上の)L-関数は s=1 で一位の零点をもつと仮定する. このとき強い Birch and Swinnerton 予想は悪い素因子の冪と２冪と符号を除き正しい. これは現在 Birch and Swinnerton-Dyer 予想に関して知られている最良の結果である. 虚数乗法をもつことを仮定しているのは, この場合は岩澤主予想と p 進高さ関数の非自明性が知られているからである. これらを認めるなら虚数乗法を持たなくても良い. この p 進 Gross-Zagier 公式は, p が ordinary のときは, original の

Gross-Zagier 公式が証明された直後，1980 年代後半にPerrin-Riouにより証明されていた．non-ordinary(=supersingular)のときは，p 進 L 関数がもつ非有界な分母の振る舞いと前述の p 進 de Rham cohomology の Hodge filtration の splitting の選択の問題があり，これらの問題の認識に時間がかかり，また p 進 Hodge 理論に関連した技術的な進展も待たなければならなかった．今回はこれらの問題を解決し，p 進 de Rham cohomology の Hodge filtration の splitting の選択の問題が本質的に絡む場合に関して p 進 Beilinson 予想の重要な例を与えることができた．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　５件）］

1. Shinichi Kobayashi,
The p-adic Gross-Zagier formula for elliptic curves at supersingular primes, Inventiones mathematicae, (2012), 掲載決定, 査読あり．

2. Shinichi Kobayashi,
On the p-adic Gross-Zagier formula for elliptic curves at supersingular primes, RIMS Kokyuroku Bessatsu, (2012), 掲載決定, 査読あり．

3. Kenichi Bannai, Shinichi Kobayashi, Takeshi Tsuji,
On the de Rham and p-adic realizations of the elliptic polylogarithm for CM elliptic curves, Les Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, 43. no.2, (2010), 185-234. 査読あり．

4. Kenichi Bannai, Shinichi Kobayashi,
Algebraic theta functions and p-adic interpolation of Eisenstein-Kronecker numbers, Duke mathematical journal, 153. No.2, 2010, 229-295, 査読あり．

5. Kenichi Bannai, Shinichi Kobayashi, Takeshi Tsuji,
Realizations of the elliptic polylogarithm for CM elliptic curves, RIMS Kokyuroku Bessatsu, B12 (2009) 33-50, 査読あり．

〔学会発表〕（計　15 件）

1. Shinichi Kobayashi, Torsion points on the quotient of a Fermat Jacobian via Anderson's p-adic soliton theory II,
2012 NCTS Mini-Workshop on Number Theory, 2012年3月7日, National Tsinghua University, Taiwan.

2. Shinichi Kobayashi, The p-adic Gross-Zagier formula for elliptic curves at supersingular primes, East Asia Number Theory Conference, 2012 年 1 月 16 日, National Taiwan University. Taiwan.

3. Shinichi Kobayashi, The p-adic Gross-Zagier formula for elliptic curves at supersingular primes, PanAsian Number Theory Conference, 2011 年 8 月 26 日, Morningside Center of Mathematics, Beijing. China.

4. 小林　真一, 超特異素点におけるp進Gross-Zagier公式について, 代数学コロギウム,
2011年 1 月 26 日, 東京大学数理科学研究科.

5. 小林　真一, 超特異素点における p 進 Gross-Zagier 公式について, 数論幾何セミナー, 2011 年 1 月 17 日, 18 日, 北海道大学.

6. 小林　真一, 超特異素点における p 進 Gross-Zagier 公式について, 代数的整数論とその周辺, 2010 年 12 月 7 日, 京都大学数理解析研究所.

7. 小林　真一, 超特異素点における p 進 Gross-Zagier 公式について, 大阪大学整数論&保型形式セミナー, 2010 年 11 月 12 日, 大阪大学.

8. 小林　真一, 超特異素点における p 進 Gross-Zagier 公式について, L-関数の特殊値と数論幾何, 2010 年 10 月 8 日, 美山町自然文化村河鹿荘.

9. 小林　真一, Mazur-Tate の p-進テータ関数とその周辺, P 進佐藤理論と数論幾何,
2010 年 9 月 30 日, 東北大学.

10. 小林　真一，超特異素点における p 進 Gross-Zagier 公式について I，II，数論幾何ワークショップ 2010，2010 年 8 月 5 日，6 日，沖縄尚学高等学校

11. 小林　真一，超特異素点における p 進 Gross-Zagier 公式について，
岩澤セミナー，
2010 年 7 月 31 日，慶応大学.

12. 小林　真一，超特異素点における楕円曲線の p 進 L 関数の微分値について，東北大学整数論セミナー，2010 年 5 月 17 日，東北大学.

13. 小林　真一，超特異素点における楕円曲線の p 進 L 関数の微分値について，名古屋大学数論幾何セミナー，2010 年 2 月 9 日，名古屋大学.

14. 小林　真一，Integral structures on p-adic Fourier theory，2010 Korea-Japan Number Theory，2010 年 1 月 20 日，Seoul National University.

15. 小林　真一，Mumford の代数的テータ関数と p-進テータ関数，P-adic Special functions & Arithmetic Geometry，2009 年 10 月 31 日，蔵王ゆと森倶楽部.

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
小林　真一　 (KOBAYASHI SHINICHI)
東北大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：80362226

(2)研究分担者
（　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
（　　）

研究者番号