様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成　25　年　5　月　29　日現在

機関番号：16401
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2009　～　2012
課題番号：21740021
研究課題名（和文）　テータ写像が結ぶ保型形式と代数的組合せ論の有機的研究

研究課題名（英文）　Studies on automorphic forms and algebraic combinatorics connected via theta map

研究代表者
大浦　学　（OURA MANABU）
高知大学・教育研究部自然科学系・准教授
研究者番号：50343380

研究成果の概要（和文）：
E-多項式はテータ写像により、モジュラー形式へと写される。ここで得られるモジュラー形式について、種数１の場合に次のようなことが知見された。もともと E-多項式はアイゼンシュタイン級数に対応するものとして導入したが、アイゼンシュタイン級数と似た性質を持つことが観察できた。すなわち、基本領域内におけるゼロ点は原点から距離１の部分にあり、適当な重さの差がある場合、それらのモジュラー形式のゼロ点は分離的と呼ばれる性質を持つ。ただし、一般的には証明されておらず、これからの研究課題である。

研究成果の概要（英文）：
An E-polynomial is mapped to a modular form. We observed the obtained modular forms in genus 1. Originally E-polynomials are introduced as a counterpart of Eisenstein series and we found similar properties as Eisenstein series. The obtained modular forms have zeros on the circle of radius 1 in the fundamental region and those zeros have the so-called separation property. However, they are not proved and are expected to be clear in our subsequent research.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００９年度	1,400,000	420,000	1,820,000
２０１０年度	600,000	180,000	780,000
２０１１年度	600,000	180,000	780,000
２０１２年度	600,000	180,000	780,000
年度			
総　計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：代数的組合せ論、保型形式

１．研究開始当初の背景

j（τ）=1/q+744+…に代表される楕円関数は１９世紀に広く研究されており、いくつかの多変数化の方向性も示された。そのなかでも

我々はジーゲルによる一般種数モジュラー形式の理論（１９３９年、いわゆるジーゲルモジュラー形式）にしたがう。ジーゲルはモジュラー形式の一般的な性質を研究し、モジュラー形式の典型的な例としてアイゼンシュタイン級数の基本的な性質について述べた。そこで重要な問題として考えられるものの一つは、モジュラー形式たちがなす次数付き環の構造を明らかにすることである。さらに詳しく述べると、種数を固定したときモジュラー形式たちが生成する次数付き環の生成元、生成元の間に成り立つ関係式、次元公式などを具体的に記述することである。ヴィット、マースらの部分的な結果ののち、井草準一は１９６０年代に種数２の場合に先駆的な研究を行った。すなわち種数２のモジュラー形式の次数付き環の生成元、それらの間に成り立つ関係式、次元公式を明らかにしたのである。井草は種数３以上の場合にもいくつかの研究方針を与えた。露峰茂明は井草の思想を踏まえたうえで、種数３の場合の生成元、次元公式を与えた（１９８６年）。ただし、そこで与えられた生成元が最少な生成元であるか、それらの間の関係式はどうなるかなど、未解決の部分も残っている。種数４の場合の生成元、生成元の間の関係式、次元公式はすべて現在でも未解決であるが、私はこの場合に取り組んできたのである。ただし、その手法は次に述べるような方法である。

研究課題名にもあがっている代数的組合せ論は、いくつかの流れが考えられるが、ここでは符号理論に注目したい。情報分野に源をおく符号理論であるが、現在では純粋数学の分野でも研究されている。我々が注目したい先駆けとなる研究は１９７０年代初頭に Gleason, Broue, Enguehard らによってなされた。その後、何人かの部分的な貢献ののち、B.Runge は１９９３年、符号理論とモジュラー形式を見通しよく、一般種数で結びつけた。この二つの分野、整数論と代数的組合せ論を結びつけたのは不変式論とテータ関数である。これにより高い種数でのモジュラー形式の研究に代数的組合せ論の応用が可能となった。私は代数的組合せ論を研究の出発点としており、その立場からモジュラー形式の研究へ参加したのである。

Runge の行った研究は２元体上の符号、有理整数環上の格子、ジーゲルモジュラー形式などを包括的に結びつけるものであった。この対応は私を含めた何人かの研究者によりいくつかの一般化がなされている。基本的には Runge が行ったのと並行な議論、結果が得られているといえよう。

話しをもどそう。モジュラー形式論と符号理論の対応があると述べた。モジュラー形式には典型的な例としてアイゼンシュタイン級数がある。アイゼンシュタイン級数は様々な場面で重要な役割を果たしている。たとえば先にあげた j（τ）はアイゼンシュタイン級数たちの商として書き下すことができ、またアイゼンシュタイン級数が生成する環をその商体内での整閉包をとると、モジュラー形式全体のなす環に一致することが知られている（これは本質的にはジーゲルによるものだが、このようなとらえ方をしたのは井草が最初だと思う）。さて、アイゼンシュタイン級数に対応するものが代数的組合せ論側に欠けていると私は思った。そこで E-多項式の概念を導入した。

物理学者 D'Hoker, Phong らの先駆的研究により、ある条件件を満たすテータ群に関する重さ１６の尖点形式の存在、一意性が問題となった。我々は種数４に関する結果を与え、問いに答えた。ここには Schottky の尖点形式が存在するところであり、興味深いものである。

２．研究の目的

複素数体上の多変数多項式環において、その変数を適当なテータ関数で置き換える写像をテータ写像と呼ぼう。私の研究はこのテータ写像で結ばれる整数論と代数的組合せ論の周辺部分ということになる。一般論的には代数的組合せ論における符号やデザイン、格子などの存在・非存在、符号の重み多項式、重み多項式のなす環、整数論ではモジュラー形式の構成、モジュラー形式のなす環などが研究対象となる。高い種数のモジュラー形式のなす環の構造を明らかにすることは整数論における重要課題の一つである。たとえば、これが明らかになると j（τ）に代表されるような面白い性質を持つモジュラー形式（関数）の研究が期待される。

１の背景で述べたが、高い種数のモジュラー形式の構造を明らかにするのは、本研究の一つの目的である。ここで高い種数とは３以上を考えている。モジュラー形式のなす環をとらえるのに古典的な方法として不変式論を用いる方法がある。そこで不変式環の研究も目的の一つとなる。具体的には Runge が与えた有限群の不変式環である。この有限群の不変式環の様子がわかるとモジュラー形式の構造がわかる場合があるのである。

E-多項式について上に述べた。これはモジュラー形式においてアイゼンシュタイン級数に対応するものとして導入した。この E-多項式の研究を深く行うことは、アイゼンシュタイン級数の研究がそうであるように、現在の

モジュラー形式と代数的組合せ論の対応において重要な進展を与えるはずである。またこの研究は、一般の有限群に対する E-多項式をうながし、一般の有限群と保型形式の関係を示唆するはずである。ただし、どの程度まで一般的な有限群が対応できるかは、現在のところわからない。

特別な性質を満たす、テータ群に関する重さ１６の尖点形式の研究は、物理からの要請で研究を開始したが、数学的にも発展が期待できると思う。高い種数の場合にその研究を行うのは意義があると考えられる。

３．研究の方法

モジュラー形式と組合せ論の間に対応があるため、双方向の研究が可能である。片方のよい所（わかりやすい所）をもう片方に応用してみようという態度である。いずれにせよ、私の研究では有限群（行列群、置換群）がよくあらわれ、その群の部分群、軌道、不変式などの計算を行う。

また、様々な分野の人に高知に来ていただき、セミナーを開催した。特に私の研究費で招へいした方々の一部は長谷川武博（都留文科大)、大西良博（岩手大)、平之内敏郎（広島大)、水野義紀（徳島大)、浅井哲也（静岡大名誉教授)、坂内英一（九州大名誉教授、上海交通大学)、小関道夫（山形大名誉教授)、長岡昇勇（近畿大)、須田庄（東北大)、境優一、山崎義徳（愛媛大)、平坂貢（釜山大)、浜畑芳紀(立命館大)、井原健太郎(大阪大)、Charles Siegel (Kavli IPMU)らである。彼らとの議論は研究を進めるうえで重要な位置を占める。

私の研究において、種数がからんでくる場合がおおいので、高い種数の場合を計算しようとするとき、計算機の利用は本質的である。有限群、符号、モジュラー形式の計算などで用いる。主たる計算ソフトはMalple, Magmaである。

４．研究成果

高い種数のモジュラー形式のなす環の構造に関するものや物理からの要請で始めたある性質を持つ尖点形式に関しては結果が得られなかった。E-多項式の方に研究の重点を置いたということもある。今後の研究課題であろう。

種数１のアイゼンシュタイン級数は詳しく研究されている。そのゼロ点は著しい性質をもつ。詳しく書くと、アイゼンシュタイン級数のゼロ点は基本領域内では原点から距離１の所にある。また適当な重さのアイゼンシュタイン級数のゼロ点は、適当に重さが低いアイゼンシュタイン級数のゼロ点の間に存在するという分離定理が成り立つ。似たような状況が E-多項式におこっていないか調べた。

種数１のE-多項式は２変数多項式である。その変数に２次のテータ定数を代入することにより、モジュラー形式が得られる。そのようにして、E-多項式から得られるモジュラー形式のゼロ点を調べた。私が調べた範囲では、それらはアイゼンシュタイン級数と同じく、基本領域内では原点から距離１の部分にあり、また分離定理も成り立つということが観察された。なお、三枝崎剛（山形大）からE-多項式のゼロ点に関して、Duursma が定義した符号のゼータ関数と関連して非常に興味深い計算結果の知らせを受けた。これも今後の研究課題となるであろう。

Wielandt の置換群の教科書にしたがって、中心化環の計算を E-多項式に関連しておこなった。復習しておこう。ある有限集合上の有限置換群を考える。可移な作用をしていると仮定する。集合から任意に１点を選び、その点の固定化部分群を考え、再びその固定化部分群の集合への作用を考える。このとき、集合はいくつかの部分集合の和に分かれるが、これにより中心化環が得られる。この中心化環は代数的組合せ論ではアソシエーションスキームとして広く研究されているものの典型的な一例となっている。実際は中心化環の研究はアソシエーションスキームの先駆けと言う方が正しいだろう。

E-多項式に関連して、中心化環の研究も行った。そのために少し詳しく見ておこう。整数環上の一般種数の斜交群がテータ関数に作用したとき、ある有限群がえられる。この有限群が Runge が取り上げた群である。Runge はこの有限群の不変式環からジーゲルモジュラー形式のなす環が得られることを示したのである。さてアイゼンシュタイン級数は、斜交群とその部分群のペアーで定義される。E-多項式は先ほど述べた有限群とその部分群から定義される。ここで現れる二つのペアー、有理整数環上の斜交群とその部分群、件の有限群とその部分群、これらはテータ写像により丁度対応したものとなっているのである。これも E-多項式の研究の動機である。さて、話はここで現れる有限群とその部分群のペアーになるのであるが、この有限群は自

身を部分群で割った剰余類の集合上に可移に作用する。そこで上で述べた中心化環を考えることができる。私は種数１と２の場合に件の行列群を置換群としてとらえ、軌道の計算を行った。たとえば種数１の場合は軌道の長さが１、１，１，１，４，４，４，４，４となった。一般的な性質をとらえるまでには至っていない。Nebe,Rains,Sloane らの研究により、ここで考えている中心化環は Barnes-Wall 格子と密接な関係があるはずであり、Barnes-Wall 格子により記述できると考えている。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔学会発表〕（計６件）
① 大浦　学、Modular forms of weight 8 for the theta group, 第２９回代数的組合せ論シンポジウム、平成２４年６月１８日、弘前大学。
② 大浦　学、代数的組合せ論とジーゲルモジュラー形式、保型形式ミニ研究集会、平成２４年３月３日、近畿大学。
③ 大浦　学、モジュラー形式としての E-多項式、組合せ論セミナー、平成２４年３月１日、大分工業高等専門学校。
④ 大浦　学、Some consequences of the work of Nebe-Rains-Sloane, Workshop "Lattices, codes and modular forms", 平成２３年９月２８日、アアヘン工科大学、ドイツ。
⑤ 大浦　学、Some computations concerning to the average weight enumerators, Japan-Korea workshop on algebraic combinatorics, 平成２３年１月２４日、東北大学。
⑥ 大浦　学、Remark on the invariant rings of finite unitary reflection groups, Workshop on Algebraic combinatorics、平成２２年１１月２６日、河北師範大学、中国。

〔その他〕
ホームページ等
http://www.math.kochi-u.ac.jp/oura

６．研究組織
(1)研究代表者
大浦　学　(OURA MANABU)
高知大学・教育研究部自然科学系・准教授
研究者番号：50343380

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし