様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２４年　５月　３１日現在

機関番号：１７４０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2009～2011
課題番号：２１７４００２５
研究課題名（和文）：保型形式の具体的構成とその数論的及び幾何学的応用
研究課題名（英文）：Explicit construction of automorphic forms and its application to number theory and geometry
研究代表者：成田 宏秋（NARITA HIROAKI）
熊本大学・大学院自然科学研究科・准教授
研究者番号：70433315

研究成果の概要（和文）：数論的研究については、主な成果として奈良女子大の岡崎武生氏との共同研究により次数２の斜交群とその内部形式上の保型形式の間のジャッケ・ラングランズ・清水対応の例をテータリフトと呼ばれる保型形式により与えた。幾何学的応用に関しては、一般次元の双曲空間を含む対称錐体上の実数値保型関数のある一般的な構成を与えた。前者の結果はラングランズ函手性という保型形式の数論の指導原理について数少ない具体例を与えたものである．後者については、実双曲空間の算術商の実アフィン空間への埋め込みを考えるという幾何学の問題の一般化を意識した結果である。

研究成果の概要（英文）：As the main progress of the study on the number theory, I have succeeded in providing examples of the Jacquet-Langlands-Shimizu correspondence for automorphic forms on the symplectic group of degree two and its inner forms by some theta lifting construction of the automorphic forms, which is a joint work with Takeo Okazaki. As for the geometric application, I have given a general construction of real-valued automorphic functions on symmetric cones, which contain real hyperbolic spaces of general dimension. The former achievement can be regarded as very few examples of the guiding principle of the theory of automorphic forms, called ``Langlands principle of functoriality’’. For the latter we have in mind a geometric application such as the embedding of an arithmetic quotient of a hyperbolic space into a real affine space and its generalization to symmetric cone.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００９年度	1,200,000	360,000	1,560,000
２０１０年度	1,000,000	300,000	1,300,000
２０１１年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総　計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学、代数学
キーワード：整数論、保型形式、テータリフト、ジャッケ・ラングランズ・清水対応、双曲多様体、対称錐体、実数値保型関数

１．研究開始当初の背景

前世紀末のフェルマーの最終定理の解決以来、今世紀に入ってからの整数論の様々な大予想の解決などにみられる進展は誠にめざましいものがある。そしてそのような進展を基礎にして更なる発展的研究が継続中である。このような進展において保型形式論はしばしば重要な貢献をしてきたが、それは古典的な関数のレベルでの保型形式を研究するスタイルではなく、保型形式が生成する表現、つまり保型表現を研究しなるべく一般的な状況で研究する手法による成果と言える。

保型表現論的手法を重視する傾向はしばらく続くと思われるが、注意しなければならないのは、この手法が保型形式のすべてを明らかにしている訳ではないということである。関数としての保型形式は整数論の興味の対象であっただけでなく、他分野への応用も見やすかった。実際古典的な保型形式論は幾何学や解析学などの幅広い分野との関連と共に発展してきたと言える。

このような背景のもと私が選んだ保型形式論の研究スタイルは保型形式を「関数のレベルで具体的に作ること」である。保型表現論ではラングランズ函手性という保型形式と保型Ｌ関数の数論的研究の指導原理があるが、その関数のレベルでの具体例を作る技術と努力が保型表現論では足りない。保型表現論で作られてきた様々な一般論の例を与える努力が必要という意識から、私の関数のレベルでの保型形式にこだわるという意思を強めた。

また研究課題名にある「幾何学的応用」というは、保型形式の関数のレベルでの具体的構成という研究スタイルから自然に生じた問題意識である。より具体的には松本圭司氏、吉田正章氏らによる４次元Ｉ型領域上のテータ関数を３次元双曲空間に制限することで得られる実数値保型関数を使った、３次元双曲多様体の実アフィン空間への埋め込みの研究に影響を受けたものである。保型形式論は整数論に限定しない様々な応用の可能性を秘めているのであり、整数論以外の応用の可能性を探る努力を継続することは保型形式論の今後の発展のためには惜しむべきではないと考える。

２．研究の目的

（１）整数論的研究についての目的は、次数２のシンプレクティック群 GSp(2)とその内部形式 GSp(1,1)の保型形式の間の保型 L 関数の一致を保つ対応(移送)の例を作ることである。この２つの代数群は同じ双対群を持つ。これはいわゆる「ラングランズ函手性」の特別な場合みなし得て, GSp(1,1)の保型Ｌ関数は必ず GSp(2)の何らかの保型 L 関数であろうという予想が立つ。これは四元数環の乗法群上の保型形式のＬ関数が次数２の一般線形群 GL(2)の保型Ｌ関数になっていることを示した、ジャッケとラングランズそして清水の仕事から「ジャッケ・ラングランズ・清水対応」と呼ばれる。この保型形式の対応に関する保型表現論的研究はいくつかあるが、保型形式のレベルでその具体例を作る研究は四元数環と GL(2)の場合以外では殆ど例がないと思われる。

（２）幾何学的応用に関しては、松本-吉田等による３次元実双曲多様体の実アフィン空間への埋め込みの研究を深めることと、その高次元化や実双曲空間を含む対称錐体の離散群による商多様体に対しても一般化の可能性を探ろうというものである。それを動機として対称錐体上の実数値保型関数を具体的に構成することが研究の基礎となる。

３．研究の方法

（１）シンプレクティック群 GSp(2)とその内部形式 GSp(1,1)のジャッケ・ラングランズ・清水対応を与えるために、この２つの代数群上の保型形式を「テータリフト」と呼ばれる方法で構成する。

これは、大きなシンプレクティック群の中の簡約双対ペアと呼ばれる２つの簡約代数群が与えられたとき、片方の簡約代数群上の保型形式とヴェイユ表現という大きなシンプレクティック群の表現で作られるテータ級数との畳み込みにより、もう片方の簡約代数群上の保型形式を構成するというものである。

我々の研究の場合、具体的には GSp(2)に対しては楕円カスプ形式の２つの組からのテータリフトで構成し、GSp(1,1)に対しては楕円カスプ形式と定符号四元数環の乗法群上の保型形式の組からのテータリフトにより構成する。これら２つのテータリフトは、それぞれ４次の分裂型直交群とシンプレクティック群 GSp(2)という簡約双対ペアと、４次の直交群の非分裂型内部形式と内部形式 GSp(1,1)という簡約双対ペアに対するものである。

その次にテータリフトで構成した保型形式が生成する保型表現の加群としての構造を詳細に調べジャッケ・ラングランズ・清水対応の条件を満たしているかどうかを調べることになる。

（２）幾何学的応用に関する研究については、松本‐吉田の研究のように、テータ関数のような管型対称領域Ｄ上の正則保型形式をＤの虚部そして現れる対称錐体に制限し、対称錐体上の保型関数を構成する。そのようにして様々な実数値保型関数を用意し、実双曲空間やより一般には対称錐体の算術商の実アフィン空間への埋め込みに適した実数値保型関数を探すという手順を踏んだうえで、埋め

込み問題を考えるのが理想である。

４．研究成果

（１）次数２のシンプレクティック群 GSp(2) とその非コンパクトな内部形式 GSp(1,1) について、ジャッケ・ラングランズ・清水対応の例を２つの楕円カスプ形式ないしは楕円カスプ形式と四元数環上の保型形式のペアからのテータリフトで構成される保型形式により与えることができた。そして更にコンパクト内部形式 GSp*(2) の場合にもジャッケ・ラングランズ・清水対応の例を与えることができた。

この結果は奈良女子大の岡崎武生氏との共同研究で得たものであるが、岡崎氏の担当は GSp(2) の保型形式のテータリフトによる構成で、私の担当は GSp(1,1) 及び GSp*(2) 上の保型形式のテータリフトによる構成及び、これらの保型形式が生成する保型表現の局所成分の決定である。以下では結果についてより具体的にいくつか項目に分けて説明する。

① ３のテータリフトのＬ関数について：

シンプレクティック群 GSp(2) とその内部形式に対してはスピノールＬ関数という次数４の保型 L 関数が定まる。我々は GSp(2), GSp(1,1), GSp*(2) への３つのテータリフトのスピノールＬ関数が持ち上げられる楕円カスプ形式または定符号四元数環上の保型形式のＬ関数の積になることを示し、我々が扱ったテータリフトが、上記の３つの代数群上の保型形式でスピノールＬ関数が大域的に一致する例を与えることを示した。この一致は多くの研究でしばしば除外される、無限素点や分岐素点を含めた一致である。

② テータリフトで作った保型形式のレベル構造：

内部形式 GSp(1,1) 及び GSp*(2) 上の保型形式については、有限素点で極大コンパクト群で右不変であるものを構成した。GSp(1,1) についてはカスプ形式を構成している。テータリフトで構成した GSp(2) の保型形式は、そのレベルが持ち上げられる楕円カスプ形式のレベルの積であるパラモジュラー・カスプ形式であるが分かっている。このカスプ形式のうち、レベルが素数の高々２乗の積であるパラモジュラー・カスプ形式により、今述べた内部形式上の極大コンパクト群で右不変な保型形式と同じスピノールＬ関数を持つものが構成できることが分かった。

③ テータリフトが生成する保型表現の局所成分の表現：

持ち上げられる楕円カスプ形式が原始的であることと、定符号四元数環上の保型形式がヘッケ同時固有的であるという仮定のもと、上述の GSp(2), GSp(1,1), GSp*(2) へのテータリフトが生成する保型表現 (GSp(2) と GSp(1,1) についてはカスプ保型表現) が既約であることが証明できる。GSp(2) の場合はブルックス・ロバーツの結果に他ならないが、GSp(1,1) と GSp*(2) の場合については、アメヤ・ピターレとラルフ・シュミッドとの共同研究により得た、ヘッケ同時固有形式が生成する保型表現の既約性に関する一般論を使う。 実際、我々が構成した GSp(1,1) と GSp*(2) 上の保型形式は、持ち上げられる保型形式がヘッケ同時固有的なら、ヘッケ同時固有的であることが証明できこの一般論が適用可能である。

保型表現の既約性が分かると、それは各素点での既約許容表現の制限テンソル積に分解できる。GSp(2) へのテータリフトの場合、ウィーテック・ギャンと武田秀一郎の結果により、その有限素点での成分の表現は決定されている。無限素点での既約許容表現はいわゆる「大きい離散系列表現」であり、これはトーマス・プルツェビンダの結果である。

内部形式 GSp(1,1), GSp*(2) へのテータリフトについては、各有限素点の表現が極大コンパクト群に関する不変ベクトルを持つ、つまり「球表現」であることから、各素点での既約許容表現は、その不変ベクトルのヘッケ固有値を計算することで決定できることが知られていることに注意する。これにラルフ・シュミッドが与えた球表現の明示的な記述を考え合わせると、この場合のテータリフトの各有限素点での既約許容表現が決定できる。無限素点での表現は離散系列表現で、これはジャン・シュ・リ、アネグレット・ポール、エン・シャイ・タン、チェン・ボー・ツゥーの４人の共著論文の結果である。

④ 以上の結果の応用：

これまで、持ち上げられる定符号四元数環上の保型形式と楕円カスプ形式の重さが等しい場合の GSp(1,1) の場合のテータリフト、つまり「荒川リフト」の場合についてフーリエ係数の２乗ノルムと保型Ｌ関数の中心値を明示的に関連付ける公式を得たが、この研究期間で「重さが等しい」という条件を外して結果をえることができた。そして上の保型 L 関数の一致に関する結果により、この GSp(1,1) へのテータリフトのフーリエ係数を GSp(2) の保型Ｌ関数の中心値とも明示的に関連付けることができた。

⑤ 研究成果の意義と今後の課題：

上で述べた通り、ジャッケ・ラングランズ・清水対応は次数２の一般線形群 GL(2) とその内部形式である定符号四元数環の乗法群上の保型形式の場合でできている。それ以外の場合では次数ｎの一般線形群 GL(n) の場合のバドレスク等の結果が有名である。しかし本研究のようにＬ関数の一致の例を保型形式と保型表現両方の観点から与え、保型表現の局所成分を明示的に与えたジャッケ・ラン

グランズ・清水対応は GL(2)と定符号四元数環の場合以外に、本研究を除いてないと思われる。

また本研究では、テータリフトで得た結果を踏まえ、テータリフト以外の保型形式を含めた一般の GSp(2)及びその内部形式上の保型形式ないしは保型表現に対する明示的なジャッケ・ラングランズ・清水対応の予想を与えた。今後の自然な課題として浮かびあがるのが、この予想をなるべく一般的に解決することである。今回得た結果はテータリフトの特殊性を使っており、この手法に固執するだけでは一般的状況での研究方法は分からないと思われる。一般的状況での研究を進めるための方法としては、跡公式を使う必要があると思われる。

（２）実数値保型関数のある一般的構成を一般の対称錐体に対して与えた。具体的には、正定値実対称行列全体、正定値エルミート行列全体(複素係数と四元数体係数)、ローレンツ錐と一つの例外型である８元数係数の３次正定値エルミート行列全体、以上の場合に対して実数値保型関数の統一的な構成方法を与えた。この研究に関して詳しい説明を以下の通り与える。

①　構成方法：

対称錐体は管型領域と呼ばれる複素対称領域の虚部に現れる実領域である。我々はこの対称錐体上の実数値保型関数を、管型領域上の正則保型形式のフーリエ展開に現れる関数のある離散群上の平均化を考え、それを対称錐体に制限することで構成した。これは正則関数の制限で得られることから実解析的であることが分かる。そして作り方から消えない保型関数の構成を与えている。実際、正定値の保型関数になっている。

②　性質：

作り方から、もう一つ分かることは、管型領域上の正則保型形式の対称錐体への制限は、この実数値保型関数の線形結合であることが分かる。また正定値実対称行列の場合で、実数値保型関数のテータ級数の要領による構成が与えられているが、これも我々が構成した実数値保型関数の線形結合として書ける。

③　研究の意義と課題：

この研究はある４次元のＩ型複素対称領域上のテータ級数をその複素領域の虚部に埋め込まれている３次元双曲空間に制限して実数値保型関数を構成した松本-吉田等の仕事に影響を受けたものである。本研究を通して彼らの保型関数の構成は、一般的状況では、IV 対称領域上の正則保型形式をその複素領域の虚部に埋め込まれている実双曲空間への制限を考えることであるという理解に至った。またこの保型関数は実解析的保型形式であるが、ハリスチャンドラが定義した通常意味での実解析的保型形式とは違う保型形式であるように思われ、これまでにない新しいタイプの保型関数の構成を与えていると期待している。

この研究の応用としては、松本‐吉田が与えた、実数値保型関数による３次元双曲空間の算術商で与えられる多様体を実アフィン空間に埋め込む問題の一般化を考えていたが、結局この研究期間ではよい応用を見つけることがかなわなかった。松本‐吉田等の結果は制限されるテータ級数の満たす代数的関係式の情報を使っているが、我々が構成した実数値保型関数についてはそのような手法は期待できないと思われる。松本‐吉田等の仕事のような幾何学的応用は今後も継続して探るべきであると考えるが、そのためには本研究で構成した実数値保型関数についての研究を深めるのみならず、他にも幾何学的応用につながりそうな、よい保型関数の構成方法を探っていかねばならないと考えている。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）

① 成田宏秋、Ameya Pitale, Ralf Schmidt, Irreducibility criteria for local and global representations, to appear in Proceedings of the American mathematical society, 査読有

② 成田宏秋、岡崎武生、Jacquet-Langlands-Shimizu correspondence for theta lifts to GSp(2) and its inner forms, preprint, 査読無

③ 成田宏秋、Real-valued automorphic functions, preprint, 査読無

〔学会発表〕（計１２件）

① 成田宏秋、Bessel periods of theta lifts to GSp(1,1) and central values of some L-functions of convolution type, International workshop on mathematics, 2012. 2.21、Sultan Qaboos Univerisity (オマーン、マスカット)

② 成田宏秋、Jacquet-Langlands-Shimizu correspondence for theta lifts to GSp(2) and its inner forms, 研究集会「保型形式と保型的Ｌ函数の研究」、2012. 1. 17, 京都大学数理解析研究所(京都)

③ 成田宏秋、Jacquet-Langlands-Shimizu correspondence for two theta lifts to GSp(2) and GSp(1,1), 第１４回整数論オ

ータムワークショップ, 2011. 11.3、白馬ハイマウントホテル(長野)

④ 成田宏秋、Fourier coefficients of theta lifts to GSp(1,1) and central values of some Rankin-Selberg L-functions, Workshop on L-functions, 2011. 4. 21, 九州大学(福岡)

⑤ 成田宏秋、Global coincidence of spinor L-functions for some automorphic forms on GSp(2) and GSp(1,1), Algebra and representation theory seminar, 2011. 3. 11, University of Oklahoma (アメリカ合衆国)

⑥ 成田宏秋、Examples of the Jacquet-Langlands correspondence for automorphic forms on GSp(2) and GSp(1,1), 上田勝教授追悼保型形式研究集会、2011. 1. 25, 奈良女子大学(奈良)

⑦ 成田宏秋、Fourier coefficients of Arakawa lifting and central values of some Rankin-Selberg L-functions, 第55回代数学シンポジウム, 2010. 8. 11, 北海道大学 (北海道、札幌)

⑧ 成田宏秋、Strict positivity of the central values of some Rankin-Selberg L-functions, 保型形式の整数論月例セミナー, 2010. 5.15, 東京大学(東京)

⑨ 成田宏秋、Fourier coefficients of Arakawa lifting and central L-values, 保型形式・保型表現およびそれに伴う L 関数と周期の研究, 2010. 1. 21, 東京大学 (東京)

⑩ 成田宏秋、Fourier coefficients of Arakawa lifting and some degree eight L-function, 日本数学会, 秋季総合分科会, 2009. 9. 24, 大阪大学(大阪)

⑪ 成田宏秋、Real valued automorphic functions, 玉原特殊多様体研究集会, 2009. 7.22, 東京大学玉原国際セミナーハウス (群馬)

⑫ 成田宏秋、Fourier coefficients of Arakawa lifting and some degree eight L-functions, 保型形式の整数論月例セミナー, 2009. 6.20, 東京大学 (東京)

〔その他〕
ホームページ等
http://www.sci.kumamoto-u.ac.jp/~narita/narita.htm

６．研究組織
(1)研究代表者
成田　宏秋 (NARITA HIROAKI)
熊本大学・大学院自然科学研究科・准教授
研究者番号：70433315

(2)研究分担者
(　　)

研究者番号：

(3)連携研究者
(　　)

研究者番号：