

機関番号：32657

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2009～2010

課題番号：21740029

研究課題名(和文) 高次元代数多様体上の曲線の変形および障害

研究課題名(英文) Deformations of curves on a higher dimensional algebraic variety and their obstructions

研究代表者

那須 弘和 (NASU HIROKAZU)

東京電機大学・情報環境学部・助教

研究者番号：30535331

研究成果の概要(和文)：

本研究では、高次元代数多様体上の曲線の無限小変形とその障害、ヒルベルトスキームの非被約成分に関する研究を行った。その成果として、空間曲線のヒルベルトスキームの非被約成分に関するある予想(Kleppe-Ellia 予想)を、成分の構成元である空間曲線が2次の正規な場合に証明した。さらにスクロールと呼ばれる高次元有理的代数多様体上の退化曲線の変形について考察し、2位変形にリフトしないような1位無限小変形を持つ曲線族を構成した。

研究成果の概要(英文)：

In this project, we investigated infinitesimal deformations of curves on a higher dimensional algebraic variety and their obstructions, and non-reduced components of the Hilbert scheme. As a result, we have proved a conjecture due to Kleppe and Ellia, which is concerned with non-reduced components of the Hilbert scheme of space curves, in the case where a general member of the components are quadratically normal. We also study the deformations of degenerate curves on a higher dimensional scroll, and construct a family of curves, which have a first order deformation not liftable to the second order deformation.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	700,000	210,000	910,000
2010年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
年度			
総計	1,300,000	390,000	1,690,000

研究分野：代数幾何学

科研費の分科・細目：代数学

キーワード：ヒルベルトスキーム、変形理論、空間曲線、無限小変形、障害

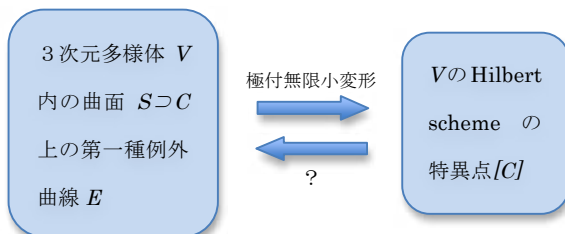
1. 研究開始当初の背景

固定された射影的代数多様体上の曲線全体の集合には代数多様体(スキーム)の構造が入り、Hilbert schemeと呼ばれる。Hilbert schemeは、代数幾何学における重要な研究対象であるモジュライと呼ばれるものの一

つである。Hilbert schemeは考察対象の曲線を幾何学的に良いものだけに制限しても、一般には悪い特異点を持つことが知られている。そのような例を初めて与えたのはMumfordである。3次元射影空間 \mathbf{P}^3 内の非特異連結曲線のHilbert schemeの既約成分

をひとつ与え、その生成点において Hilbert scheme が被約でない(non-reduced)ことを示し、病理(pathology)と位置づけた。Mumford の例は Gruson-Peskine, Kleppe, Ellia, Fløystad 等の研究者達により、空間曲線の Hilbert scheme の場合に様々な形で一般化され、Vakil により Hilbert scheme は「Murphy の法則：先天的に他の理由が無い限りモジュライ空間はいくらでも悪い特異点を持つ」を満たすことが示された。

研究代表者は Hilbert scheme が悪い特異点を持つのが自然であるならば、その原因を系統立てて明らかにしたいと考えた。学位論文において空間曲線の 1 位無限小変形が 2 位変形にリフトする為の障害類を計算し、加算無限個の Mumford 型非被約成分を具体的に構成した。京都大学数理解析研究所の向井茂氏との共同研究において、この計算を精密化し、3 次元射影空間から任意の 3 次元代数多様体に一般化した後に、与えられた 1 位無限小変形に対する「障害性判定定理」の形式にまとめた。この判定定理を \mathbf{P}^1 -束や del Pezzo 多様体上の曲線に適用することにより、Mumford の例を広範囲に一般化することに成功した。この一般化により、Hilbert scheme の病理の「病巣」とも言うべき非被約性の理由が、代数多様体上のある種の有理曲線（第一種例外曲線）にあることが明らかになってきた。



2. 研究の目的

Mumford の例(非被約成分の例)を高次元代数多様体上の曲線の Hilbert scheme の場合に一般化する、もしくは類似の構成をすることにより、特異点や次元など、Hilbert scheme の具体的性質に関する研究を行うことが、本研究の目的である。その目的を達成する為の手段として、曲線の高次元多様体上の被障害変形と高次元多様体上のある種の有理曲線(第一種例外曲線など)との間に存在すると予想される関係について研究し、これを明らかにする。

3. 研究の方法

高次元代数多様体上の曲線の変形について、1 位無限小変形とその持ち上げ障害を用いた手法 (Hilbert scheme の無限小解析的

法) により研究を行う。「1. 背景」で述べた向井茂氏との共同研究において得られた「障害性判定定理」の精密化を図り、定理を様々な代数多様体に適用し、上述の被障害変形と有理曲線との間の関係を理解し、ヒルベルトスキームの具体的性質を理解する為に役立てる。Hilbert scheme の具体的性質に関する先行研究の多くは、射影空間の Hilbert scheme に関するものであり、一般の射影的代数多様体に対する Hilbert scheme の研究は新しい。これまでの研究の道具は射影空間の特殊状況を用いたもの(例えばリエゾンの理論など)が多かった。1 位無限小変形やその障害類の理論は小平や Spencer により導入され、古くから存在するが、研究代表者自身も含め、具体的な問題に適用することは難しいと考えていた。研究代表者の考案したカップ積による障害類の計算手法が Hilbert scheme を研究する上で、新たな道具となることが期待された。

4. 研究成果

(1) 1 位無限小変形が 2 位変形にリフトする為の障害類は法束の第 1 コホモロジーの元として定義され、カップ積による表示が知られている。これを具体的に計算し、非零を示すことは容易でない。論文③では、このカップ積の計算を実行し、第一種例外曲線を用いて障害類が零で無いことを示した。この結果を第一種例外曲線の本数が複数の場合に一般化し(論文①)、非特異 3 次曲面上の曲線に適用することで、空間曲線の Hilbert scheme の非被約成分に関する次の予想を、曲線 C が 2 次的正規であるという条件のもとで証明した。

$H_{d,g}^S$ を次数 d と種数 g を持つ非特異連結空間線 $C \subset \mathbf{P}^3$ の Hilbert scheme とする。

予想 (Kleppe-Ellia) W を非特異 3 次曲面上の空間曲線の極大族から定まる $H_{d,g}^S$ の既約閉部分集合とし、 C を W の一般元とする。 C が線形正規であり、かつ $d > 9$ かつ $g > 3d - 18$ を満たすとき、次が成立する：

1. W は Hilbert scheme $H_{d,g}^S$ の既約成分に等しい。
2. $H_{d,g}^S$ が W に沿って生成的に被約である為には、 $H^1(\mathbf{P}^3, I_C(3)) = 0$ となることが必要十分である。

定理 (Nasu 2009) 予想において曲線 C が 2 次的正規である、すなわち $H^1(\mathbf{P}^3, I_C(2)) = 0$ を満たすとき、Kleppe-Ellia 予想は正しい。

2 次的正規性を仮定しない場合には、障害類の非零を示す上で技術的な困難が生じる。まだ証明の見通しが立っておらず、今後の研究

における課題としたい。予想の完全な証明が完成すれば、低次元空間曲線の Hilbert scheme の既約成分の分類に向けて大きな前進となる。例えば、与えられた小さな正の整数 d と g に対し、Hilbert scheme $H_{d,g}^s$ の既約成分の個数や次元を決定することが可能になる。

2009 年の 9 月と 11 月に北海道大学と高知大学で開催された研究集会において、本研究成果に関する講演を行った。証明の概略については、報告集に記したが、詳細については論文において現在準備中である。また 2009 年 9 月と 2010 年 2 月には、佐賀大学と熊本大学における研究集会に参加し、他の参加者達と関連話題について多くの実りある議論を行い、有用な知見を得ることができた。

(2) 2010 年度は 3 次元代数多様体上の曲線の変形障害に関する結果を、高次元代数多様体上の曲線の場合に一般化するため、障害を受けるような変形の具体例の構成に取り組んだ。赤堀隆夫氏と難波誠氏の共同研究により、平面 5 次曲線の外点からの射影が正則写像として被障害変形を持つことが知られていた。研究代表者はこの事実に着目し、以前の論文において、射影直線と射影平面の直積 $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^2$ 上に多数の被障害曲線を組織的に構成していた。この結果が本研究の出発点となった。

射影直線と 2 次元以上の射影空間の直積 $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^n$ ($n \geq 2$) をセグレ埋め込みにより射影空間 \mathbf{P}^{2n+1} に埋め込んだ射影多様体を V とする。 V の非特異超平面切断 $S=V \cap \mathbf{P}^{2n}$ に含まれる曲線(すなわち退化曲線) $C \subset V$ の変形を詳しく調べることで目的の曲線を見つけようと試みた。その結果として、退化曲線 C が 2 位変形にリフトしないような V 内の 1 位無限小変形を持つための十分条件を与えた。 S は射影空間 \mathbf{P}^n の余次元 2 の線形部分空間に沿った爆発と自然に同型になり、一般にはスクロールと呼ばれる有理的代数多様体である。先にも述べたように部分多様体の変形障害を具体的に計算し、その非零を示すのは容易でない。研究代表者の以前の研究、すなわち 3 次元代数多様体上の曲線の変形の研究においては、曲線を含む曲面上の第一種例外曲線を用いて、障害類の非零を導いた。本研究では、第一種例外曲線の代わりに超平面切断 S 上の可縮因子を障害類の計算に利用することで、その非零を示すことができた。この結果は高次元代数多様体上の曲線の変形障害を計算し、障害性判定定理の高次元版を模索する上で重要な例となることが期待される。

なお 2010 年の 11 月に早稲田大学で開催された研究集会、および 2011 年 2 月に京都大学数学教室の代数幾何学セミナーにおいて、本研究結果に関する研究発表を行った。また 2010 年 9 月にはレピコ・テールメ(イタリア)において開催された国際研究集会に参加し、

$K3$ 曲面とその上の曲線に関する講演を聴き、本研究課題に関連する有用な情報を収集した。

(3) その他の結果：

京都大学数理解析研究所の向井茂氏と共同で、一般の種数 6 の曲線から次数 4 の 3 次元 del Pezzo 多様体への Hom スキームが生成的に被約でない既約成分を持つことを証明した。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 4 件)

- ① Hirokazu Nasu, *Obstructions to deforming curves on a 3-fold, II: Deformations of degenerate curves on a del Pezzo 3-fold*, *Annales de L'Institut Fourier*, **60**(2010), no.4, 1289-1316 (査読有り)
- ② 那須弘和, *Obstructions to deforming degenerate curves on a scroll (in Japanese)*, 研究集会「都の西北代数幾何学シンポジウム」報告集, 2010, 105-114 (査読無し)
- ③ Shigeru Mukai, Hirokazu Nasu, *Obstructions to deforming curves on a 3-fold, I: A generalization of Mumford's example and an application to Hom schemes*, *Journal of Algebraic Geometry*, **18** (2009), 691-709 (査読有り)
- ④ 那須弘和, *Obstructions to deforming space curves and a remark to a conjecture of Kleppe (in Japanese)*, 研究集会「射影多様体の幾何とその周辺 2009」報告集, 2009, 1-10 (査読無し)

[学会発表] (計 5 件)

- ① 那須弘和, *Obstructions to deforming degenerate curves on a scroll*, 日本数

学会 2011 年度年会（震災による影響で
開催中止、アブストラクトによる発表の
み）、2011 年 3 月 20 日～23 日、早稲田
大学理工学部

- ② 那須弘和、Obstructions to deforming
degenerate curves on a scroll、研究集
会「都の西北代数幾何学シンポジウム」、
2010 年 11 月 10 日、早稲田大学理工学
部
- ③ 那須弘和、Obstructions to deforming
space curves and a remark to a
conjecture of Kleppe、研究集会「射影
多様体の幾何とその周辺 2009」、2009
年 11 月 21 日、高知大学理学部
- ④ 那須弘和、Obstructions to deforming
curves on a 3-fold (joint work with S.
Mukai)、研究集会「Syzygies of
Projective Varieties」、佐賀大学理工学
部、2009 年 9 月 14 日
- ⑤ 那須弘和、Obstructions to deforming
curves on a 3-fold and a remark to a
conjecture of Kleppe、研究集会「代数
幾何の関連する諸分野」、2009 年 9 月 2
日、北海道大学理学部

[その他]

ホームページ等

<http://www.math.sie.dendai.ac.jp/nasu/>
(東京電機大学:2011 年 3 月以前の研究代表
者の所属先)

<http://fuji.ss.u-tokai.ac.jp/nasu/>
(東海大学:2011 年 4 月以降の研究代表者の
所属先)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

那須 弘和 (NASU HIROKAZU)

東京電機大学・情報環境学部・助教

研究者番号：30535331