

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年6月11日現在

機関番号：11501

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2009～2012

課題番号：21740034

研究課題名（和文） Sobolev 型不等式の臨界に表れる幾何構造の抽出と距離空間の一般化

研究課題名（英文） Geometric properties on the threshold of the Sobolev type inequalities and generalization to metric spaces

研究代表者

石渡 聡（ISHIWATA SATOSHI）

山形大学・理学部・准教授

研究者番号：70375393

研究成果の概要（和文）：非コンパクトリーマン多様体及び無限グラフにおいて、空間の大域的幾何構造と幾何学的不等式、熱核の長時間挙動の密接な関係は多くの研究者により研究されてきた。本研究では Sobolev 不等式、Poincare 不等式などの幾何学的不等式の成立条件に関連する幾何構造解明を目的に非コンパクトリーマン多様体の連結和を考察し、連結部分の幾何構造と等周不等式、Poincare 不等式、熱核の長時間挙動の詳細な関係を明らかにした。

研究成果の概要（英文）：On non-compact Riemannian manifolds and infinite graphs, the relationship among global geometric structure, geometric inequalities and long time heat kernel behavior is well investigated by many researchers. In this research, we consider connected sums and we obtain a precise relationship between a structure of bottleneckness and isoperimetric inequality, Poincare inequality and long time heat kernel behavior.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	700,000	210,000	910,000
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
2011年度	800,000	240,000	1,040,000
2012年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総計	3,100,000	930,000	4,030,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：4105（数学・大域解析学）

キーワード：熱核の長時間挙動、Poincare 不等式、Sobolev 不等式、連結和

1. 研究開始当初の背景

非コンパクトリーマン多様体及び無限グラフにおいて、空間の幾何構造と Sobolev 不等式、Poincare 不等式に代表される幾何学的不等式、および熱核の長時間挙動の密接な関係は確率論、調和解析、幾何解析等でさまざまな解釈があり、これまでに多くの研究者により研究が進められてきた。特に Grigoryan, Saloff-Coste により 91 年に証明された、「volume doubling 条件のもとで、熱核の Gauss 型評価、Poincare 不等式および

Parabolic Harnack 不等式は同値である」という結果はユークリッド空間をはじめ、Ricci 曲率が非負の非コンパクトリーマン多様体のような「性質の良い」空間上の幾何解析の一つの枠組みを与える重要な定理である。このような枠組みは多様体で明らかにされた後、Sturm らによって測度付き距離空間、無限グラフやフラクタルなどにも拡張され、近年の幾何解析の発展に非常に重要な役割を果たしている。一方、この枠組みでは捉えられない、連結和のような空間でも Grigoryan,

Saloff-Coste らによって熱核の詳しい挙動が明らかにされるなど、従来の枠組みでは捉えられないような空間の幾何解析の研究も始められている。

2. 研究の目的

熱核が Gauss 型評価を持つ多様体のクラスはとても多くの例があり、大変基本的で重要であるが、この枠組みには含まれない多様体も多く存在する。このうちで典型的なものが本研究で取り扱った連結和の空間である。

連結和の空間は連結部分が「細い」ならば Poincare 不等式が成立しないことは古くから知られていた。しかしある程度太くしていけば Poincare の不等式が成立する。このとき、従来の枠組みに入るか入らないかのぎりぎりの空間から従来の枠組みを特徴づける幾何構造を抽出することが本研究の第一目的である。

Grigoryan, Saloff-Coste は 2009 年、2 つの非コンパクト多様体の有界な連結部分を持つ連結和上の熱核の精密な評価を得た。この結果は連結和のようなこれまでの枠組みでは幾何解析的に異なる空間でも幾何解析が展開できることを示唆するものである。本研究ではこのけっかを動機とし、連結和上の幾何学的不等式、連結部分の幾何構造、および熱核の長時間挙動の関係を詳細に調べることで、新たな幾何学的な枠組みを構築することが本研究の第二の目的である。

1980年代からの Gromov らによる距離空間の幾何学の発展以降、Riemann 多様体上で成立する事実をもとにして測度付き距離空間上に拡張された概念を構築する研究が活発に行われている。特に、Lott-Villani、太田、Sturm らによって最適輸送理論を用いて Ricci 曲率に相当する概念が構成され、この Ricci 曲率に相当する条件の制限のもとで Sobolev 型不等式の研究は現在でも進められており、今後大きな進展が期待されている。このような距離空間の幾何学の近年の目覚ましい発展に鑑み、これまでに得た多様体上での一連の結果を距離空間や無限グラフに拡張していくことが第三の目的である。

3. 研究の方法

(1) 研究体制

本研究が展開される研究分野は幾何学、解析学、確率論の広いエリアにわたるため、以下の研究協力者の協力を得て行われた。

・ Alexander Grigoryan 教授
(ドイツ Bielefeld 大学)

本研究の共同研究者。特に、21年7月から11月に Bielefeld 大学に滞在し、非コン

パクトリーマン多様体上の熱核の詳しい挙動、Sobolev 不等式、等周不等式、Faber-Krahn 不等式などの幾何学的不等式と空間の幾何構造との密接な関係の解明を共同で行った。また、非有界集合への hitting probability の評価、Dirichlet heat kernel の評価についてのアイデアの提供をうけた。

・ Thierry Coulhon 教授 (Australian National University)

幾何学的不等式と幾何構造の密接な関係についての最新の研究成果およびアイデアの提供をうけた。

・ 熊谷 隆 教授 (京都大学)

多様体上の幾何学的不等式、熱核の長時間挙動に関する確率論的手法、およびフラクタル上の熱核の挙動などについての最新の研究成果およびアイデアの提供をうけた。

・ 太田 慎一 准教授 (京都大学)

最適輸送理論を用いた距離空間上の幾何学についての最新の研究成果およびアイデアの提供をうけた。

・ 小谷 元子 教授 (東北大学)

多様体上の熱核の長時間挙動の解析、空間の幾何構造、およびグラフ上ランダム・ウォークの長時間挙動についての最新の研究成果およびアイデアの提供をうけた。

(2) 学会参加

関連する研究集会、学会に参加し、研究発表を通じ多くの研究者から最新情報を入手した。

(3) 関連書籍・情報機器

本研究に関連する微分幾何関係、解析関係、確率論関係の書籍を購入し、基本的事実を入手した。また、論文作成、研究発表のためにノートパソコンおよび関連の情報機器を購入した。

4. 研究成果

上記の研究目的から、本研究では2つのユークリッド空間を、増大度が $\alpha < 1$ の回転体の表面で連結した連結和上の熱核について考察し、以下の成果を得た。

(1) 回転体への hitting probability の評価

Grigoryan, Saloff-Coste は 2002 年、non-parabolic な多様体上のコンパクト部分集合への hitting probability の精密な評価を得た。この結果の拡張として、非有界な部分集合への hitting probability の計算方法

を考察し、これを用いて回転面への hitting probability の精密な評価を得た。

(2) 連結和上の等周不等式、熱核の global な Gauss 型評価

連結和の連結部分に適切な条件があるとき、連結和上の等周不等式を証明した。これを用いて回転面での連結和上で等周不等式が成り立つことを明らかにした。これにより、連結和上で熱核の上からの Gauss 型評価が成り立つことがわかった。

(3) 連結和上の熱核の上からの精密な評価

2009年に Grigoryan, Saloff-Coste により得られた有界な部分で連結した連結和上の熱核の評価の拡張として、4-1、4-2の結果を用いて、回転面で連結した連結和上の熱核の上からの精密な評価を得た。

(4) Dirichlet heat kernel の下からの Gauss 型評価

連結和上の熱核の下からの評価を求めるとき、片方の空間上での Dirichlet heat kernel の評価は重要な役割をもつ。Grigoryan, Saloff-Coste は2002年、空間からコンパクト集合を取り除いた空間の Dirichlet heat kernel が良い評価を持つことを明らかにした。本研究では、熱核が Gauss 型評価を持つ多様体から非コンパクト部分集合を取り除いた部分の Dirichlet 境界条件のもとでの熱核の下からの Gauss 型評価を求めた。

(5) 連結和上の熱核の下からの精密な評価

Grigoryan, Saloff-Coste が2009年に得た有界な連結部分の連結和の熱核の評価の拡張として、4-1、4-4の結果を用いて、連結和上の熱核の下からの評価を得た。これにより熱核を上下から同じオーダーで評価できたことになり、シャープな評価が得られた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計1件)

[1] A. Grigoryan, S. Ishiwata, Heat kernel estimates on a connected sum of two copies of \mathbb{R}^n along a surface of revolution. *Global and Stochastic Analysis*, 2 (2012), 29-65. 査読有り

[学会発表] (計18件)

[1] 「The gradient heat kernel estimate on gluing」 Research seminar "Geometric Analysis", Bielefeld 大学、2009年5

月7日。

[2] 「Gradient heat kernel estimate on gluings」 33rd Conference on Stochastic Processes and Their Applications, Berlin 工科大学、2009年7月29日

[3] 「Smallness of the first Neumann eigenvalues under a bottleneck heat kernel estimate」 Research seminar "Geometric Analysis", Bielefeld 大学、2009年9月15日

[4] 「ボトルネック型熱核評価を持つ多様体の幾何学的特徴付け」 確率論シンポジウム、愛媛大学、2009年12月17日

[5] 「ボトルネック型熱核評価を持つ多様体の幾何学的特徴付け」 確率論と幾何学、京都大学、2010年1月9日

[6] 「ボトルネック型熱核評価を持つ多様体の幾何学的特徴付け」 金沢大学数理科学談話会、2010年2月10日

[7] 「Manifolds with a bottleneck type heat kernel estimate」 Analysis and Geometry of Fractals and Metric Measure spaces、香港中文大学、2010年3月20日

[8] 「ボトルネック型熱核評価を持つ多様体の幾何学的特徴付け」 日本数学会2010年度年会、2010年3月25日

[9] 「Heat kernel on non-compact gluings」 筑波大学微分幾何学火曜セミナー、筑波大学、2010年5月11日

[10] 「Heat kernel estimates on non-compact gluings」 Research seminar Geometric Analysis, Bielefeld 大学、2010年7月20日

[11] 「熱核のボトルネック型評価と第1ノイマン固有値」 筑波大学解析セミナー、筑波大学、2010年10月13日

[12] 「熱核のボトルネック型評価と第1ノイマン固有値」 第9回RDSセミナー、明治大学、2010年10月18日

[13] 「Heat kernel estimates on non-compact gluings」 京都大学微分トポロジーセミナー、京都大学、2010年10月22日

[14] 「熱核のボトルネック型評価と第1ノイマン固有値」 東工大数理解析セミナー、東京工業大学、2010年10月29日

[15] 「Heat kernel estimates on non-compact gluings」 リーマン幾何と幾何解析、筑波大学、2011年2月19日

[16] 「Heat kernel estimates on non-compact gluings」 Long Term Workshop - Geometry and Analysis, 京都大学、2011年3月17日

[17] 「Heat kernel estimates on connected sums with non-compact joint」 Cornell Analysis Seminar, Cornell 大学、2012年1月23日

[18] 「Heat kernel estimates on connected sums with non-compact joint」 Weekly Seminar、香港中文大学、2012年3月26日

6. 研究組織

(1) 研究代表者

石渡 聡 (ISHIWATA SATOSHI)
山形大学・理学部・准教授
研究者番号：70375393

(2) 研究協力者

小谷 元子 (KOTANI MOTOKO)
東北大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：50230024

熊谷 隆 (KUMAGAI TAKASHI)
京都大学・理学部・教授
研究者番号：90234509

太田 慎一 (OHTA SHIN-ICHI)
京都大学・理学部・准教授
研究者番号：00372558

Alexander Grigoryan
ドイツ Bielefeld 大学・教授

Thierry Coulhon
オーストラリア Australian National
University・教授