

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 10 日現在

機関番号：15301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2009～2012

課題番号：21740052

研究課題名（和文）

ワイエルストラス型表現公式をもつ曲面とその特異点の研究

研究課題名（英文）Surfaces which possess Weierstrass-type representation formula and their singularities

研究代表者

藤森 祥一 (FUJIMORI SHOICHI)

岡山大学・大学院自然科学研究科・准教授

研究者番号：00452706

研究成果の概要（和文）：ワイエルストラス型表現公式をもつ曲面の性質を調べた。3次元ユークリッド空間の極小曲面と3次元双曲空間の平均曲率1曲面について今まで知られていなかった高種数の例を構成した。また、3次元ミンコフスキー空間の空間的極大曲面と3次元ド・ジッター空間の空間的平均曲率1曲面についてある種の特異点を許容し、その特異点や無限遠方における挙動を解析した。さらに3次元ミンコフスキー空間の平均曲率0曲面の性質を調べ、特異点を持たない非自明な埋め込みを構成した。

研究成果の概要（英文）：Properties of surfaces which possess Weierstrass-type representation formula are investigated. For minimal surfaces in Euclidean 3-space and constant mean curvature 1 surfaces in hyperbolic 3-space, higher genus examples are constructed. For spacelike maximal surfaces in Minkowski 3-space and spacelike constant mean curvature 1 surfaces in de Sitter 3-space, the behavior of singularities and ends are investigated. Moreover, zero mean curvature surfaces in Minkowski 3-space are investigated and some non-trivial embedding are constructed.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2010年度	700,000	210,000	910,000
2011年度	700,000	210,000	910,000
2012年度	800,000	240,000	1,040,000
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：微分幾何・ワイエルストラス型表現公式・特異点

1. 研究開始当初の背景

本研究ではワイエルストラス型表現公式をもつ曲面の大域的な性質とその特異点の振る舞いを調べる。ワイエルストラス型表現公式とは、ここでは与えられた複素解析的データから得られる線形常微分方程式系を解く（あるいは単に積分する）ことによって曲面を表現する公式のこととする。具体的には3次元ユークリッド空間の極小曲面、3

次元ミンコフスキー空間の空間的極大曲面、3次元双曲空間の平均曲率1 (CMC-1) 曲面、3次元ド・ジッター空間の空間的 CMC-1 曲面を研究対象とする。

3次元ユークリッド空間の極小曲面については古来多くの研究が行われており、また3次元双曲空間の CMC-1 曲面についてもこの四半世紀の間に梅原雅顕氏、山田光太郎氏等を中心として多くの研究が行われているが、

曲面の分類に関しては未解決の問題も多く残っている。

3次元ミンコフスキー空間の空間的極大曲面や3次元ド・ジッター空間の空間的CMC-1曲面については完備な例がほとんどないことが知られていたが、近年ある種の特異点を許容することで興味深い研究対象になることが分かってきており、その特異点や大域的性質についての研究が徐々に進んでいる。

2. 研究の目的

本研究の目的は、上述のワイエルストラス型表現公式をもつ曲面の特異点および大域的性質を調べることである。上述のワイエルストラス型表現公式をもつ曲面は、大域的な性質は大きく異なっており、ユークリッド空間の極小曲面と双曲空間のCMC-1曲面以外は完備な例がほとんどなく、従ってある種の特異点を許容した上での研究が不可避である、という性質を持つが、局所的には全て複素解析的データから構成することができ、多くの共通する性質も持っている。また、全てのambient spaceは4次元ミンコフスキー空間の部分多様体であるから、これらの曲面は全て4次元ミンコフスキー空間の特異点つき空間的曲面として統一的に扱うことができる。これらの曲面に不変な性質や、一部の曲面のみがもつ特別な性質を解明することが本研究の目的である。

3. 研究の方法

(1) 3次元ユークリッド空間の極小曲面について：現時点でいくつかの新しい曲面や既知の曲面を繋ぐ曲面の1径数族の複素解析的データが得られている。これらはコンピュータによる数値実験で曲面が存在することを検証しているが、数学的な証明ができていない。これらの曲面の周期条件を厳密に解析し、数学的に存在を証明する。また、現時点で存在が証明されている曲面が、ある仮定の下で一意性が成り立つことが予想されているので、その証明を試みる。

(2) 3次元双曲空間のCMC-1曲面について：超幾何微分方程式の理論を用いてある種の曲面の分類を試みる。また、既知の例をもとに、高種数の例の構成とその変形を試みる。

(3) 3次元ミンコフスキー空間の空間的極大曲面について：① 向き付け不可能な曲面の構成と分類を行う。構成は3次元ユークリッド空間の極小曲面のデータをもとにして周期条件を考える。分類は主に代数幾何的な手法を用いる。② 既知の例の高種数版を構成する。また、構成した曲面の特異点や無限遠方における挙動を解析する。③ 折り目特異点の研究を行う。空間的極大曲面によく現れる特異点として、既にカスプ辺、ツバメの尾、カスプ状交叉帽子、錐的特異点などについて

は先行研究があるが、錐的特異点をもつ曲面の共役曲面に現れる折り目特異点について調べる。これは、空間的極大曲面の折り目特異点を実解析的に延長することで時間的極小曲面が得られるという先行結果があるからである。具体例の構成を通して空間的極大曲面の折り目特異点に関する一般論を確立する。

(4) 3次元ド・ジッター空間の空間的CMC-1曲面について：3次元ユークリッド空間の極小曲面を3次元双曲空間のCMC-1曲面に変形する理論があるが、それと同様の理論を開発して空間的極大曲面を空間的CMC-1曲面に変形する。特に上述の(3)で構成した高種数の例の変形を試みる。

4. 研究成果

(1) Matthias Weber氏との共同研究で、3次元ユークリッド空間の3重周期的極小曲面の研究を行った。以前Weber氏との共同研究で面对称性をもつ3重周期的極小曲面の新しい構成法を発見したが、線対称性をもつ極小曲面にこの方法を拡張し、いくつかの新しい極小曲面の族を構成した。

(2) 庄田敏宏氏との共同研究で、3次元ユークリッド空間の極小曲面で2つのエンドをもつものの研究を行った。以前庄田氏との共同研究で得られた例について、ある種の対称性を仮定して一意性を証明した。

(3) Wayne Rossman氏との共同研究で、3次元双曲空間のCMC-1曲面で高種数で2つのエンドをもつ例を数値的に構成した。Rossman-Satoによって種数1の例は構成されていたが、そのデータを改良して種数を高くしても周期問題の次元が高くないようにすることに成功した。

(4) 川上裕氏、國分雅敏氏、Wayne Rossman氏、梅原雅頭氏、山田光太郎氏との共同研究で、3次元双曲空間のCMC-1 trinoidと呼ばれる曲面の分類を行った。既約なCMC-1 trinoidは梅原氏、山田氏によって分類が行われていたが、可約な場合の完全な分類は未解決であった。我々は3つの錐的特異点をもつ球面計量に関する先行結果やBPS-reductionと呼ばれる方法、さらに超幾何微分方程式を用いることで可約な場合を含むCMC-1 trinoidの完全な分類を行った。

(5) Young Wook Kim氏、Sung-Eun Koh氏、Wayne Rossman氏、Heayong Shin氏、梅原雅頭氏、山田光太郎氏、Seong-Deog Yang氏との共同研究で、3次元ミンコフスキー空間の空間的極大曲面と時間的極小曲面に関する研究を行った。特に折り目特異点と呼ばれる特異点を通して両者が解析的に繋がる状況について解析し、いくつかの重要な例を発見した。

(6) Wayne Rossman氏、梅原雅頭氏、山田光太郎氏、Seong-Deog Yang氏との共同研究で、

3次元ミンコフスキー空間の平均曲率0曲面に関する研究を行った。平均曲率0曲面とは空間的極大曲面と時間的極小曲面の混合型曲面である。上述(5)の研究結果をSchwarz D型の極大曲面に適用し、3重周期的で特異点も自己交叉ももたず、しかも曲面の基本ピースが種数3の閉曲面と同相な例の1径数族を構成した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計8件)

- ① Shoichi Fujimori, Yu Kawakami, Masatoshi Kokubu, Wayne Rossman, Masaaki Umehara and Kotaro Yamada, Hyperbolic metrics on Riemann surfaces and space-like CMC-1 surfaces in de Sitter 3-space, Recent trends in Lorentzian geometry, Springer proceedings in mathematics & statistics 26 (2013), 1-47, 査読有, DOI: 10.1007/978-1-4614-4897-6.
- ② Shoichi Fujimori, Young Wook Kim, Sung-Eun Koh, Wayne Rossman, Heayong Shin, Hidenobu Takahashi, Masaaki Umehara, Kotaro Yamada and Seong-Deog Yang, Zero mean curvature surfaces in L^3 containing a light-like line, Comptes Rendus Mathematique, Academie des Sciences, Paris 350 (2012), 975-978, 査読有, DOI: 10.1016/j.crma.2012.10.024.
- ③ Shoichi Fujimori, Yu Kawakami, Masatoshi Kokubu, Wayne Rossman, Masaaki Umehara and Kotaro Yamada, CMC-1 trinoids in hyperbolic 3-space and metrics of constant curvature one with conical singularities on the 2-sphere, Proceedings of the Japan Academy, Series A 87 (2011), 144-149, 査読有, DOI: 10.3792/pjaa.87.144.
- ④ Shoichi Fujimori and Francisco J. Lopez, Nonorientable maximal surfaces in the Lorentz-Minkowski 3-space, Tohoku Mathematical Journal 62 (2010), 311-328, 査読有, DOI: 10.2748/tmj/1287148614.
- ⑤ Shoichi Fujimori and Wayne Rossman, Higher genus mean curvature 1 catenoids in hyperbolic and de Sitter 3-spaces, Kyushu Journal of Mathematics, 64 (2010),

169-180, 査読有, DOI: 10.2206/kyushujm.64.169.

- ⑥ Shoichi Fujimori and Matthias Weber, A construction method for triply periodic minimal surfaces, OCAMI Studies, 3 (2009), 79-90, 査読有 <http://www.omup.jp/modules/papers/riemann/07Fujimori.pdf>.
- ⑦ Shoichi Fujimori, Wayne Rossman, Masaaki Umehara, Kotaro Yamada and Seong-Deog Yang, New maximal surfaces in Minkowski 3-space with arbitrary genus and their cousins in de Sitter 3-space, Results in Mathematics 56 (2009), 41-82, 査読有, DOI: 10.1007/s00025-009-0443-4.
- ⑧ Shoichi Fujimori, Wayne Rossman, Masaaki Umehara, Kotaro Yamada and Seong-Deog Yang, Spacelike mean curvature one surfaces in de Sitter 3-space, Communications in Analysis and Geometry, 17 (2009), 383-427, 査読有, http://intlpress.com/site/pub/files/_fulltext/journals/cag/2009/0017/0003/CAG-2009-0017-0003-00022894.pdf.

[学会発表] (計11件)

- ① 藤森祥一, Euclid空間の極小曲面とMinkowski空間の極大曲面(1), (2), 幾何学阿蘇研究集会, 2012年9月22-23日, 休暇村南阿蘇.
- ② 藤森祥一, Minkowski空間の3重周期的な平均曲率0埋め込みについて, 第59回幾何学シンポジウム, 2012年8月28日, 九州大学.
- ③ Shoichi Fujimori, Maximal surfaces with singularities in the Lorentz-Minkowski 3-space, The Korean Mathematical Society Fall Meeting, 2011年10月21日, Kyunpook Notional University.
- ④ Shoichi Fujimori, Maximal surfaces in Lorentz-Minkowski 3-space with arbitrary genus and their cousins in de Sitter 3-space, Spanish-Japanese Workshop on Differential Geometry, 2011年2月14日, Universidad de Granada.
- ⑤ Shoichi Fujimori, Higher genus mean curvature 1 catenoids in hyperbolic 3-space, The Third International Workshop on Differential Geometry, 2011年1月18日, 佐賀大学.
- ⑥ 藤森祥一, 3次元ミンコフスキー空間内の空間的極大曲面について, 研究集会「擬リーマン幾何学の展開III」, 2010年

- 12月18日, お茶の水女子大学.
- ⑦ 藤森祥一, Minkowski空間の向き付け不可能な極大曲面について, 第57回幾何学シンポジウム, 2010年8月7日, 神戸大学.
 - ⑧ Shoichi Fujimori, Maximal surfaces with singularities in the Lorentz-Minkowski 3-space, Progress in surface theory, 2010年5月4日, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach.
 - ⑨ 藤森祥一, 向き付け不可能な極大曲面, 部分多様体論・湯沢 2009, 2009年11月28日, 湯沢グランドホテル.
 - ⑩ 藤森祥一, 3次元Minkowski空間内の向き付け不可能な極大曲面, 日本数学会秋季総合分科会, 2009年9月24日, 大阪大学.
 - ⑪ Shoichi Fujimori, A construction method for triply periodic minimal surfaces, Variational problems for curves and surfaces and related topics, 2009年6月30日, 奈良女子大学.

[図書] (計0件)

[産業財産権]

○出願状況 (計0件)

○取得状況 (計0件)

[その他]

ホームページ等

<http://www.math.okayama-u.ac.jp/~fujimori/index-j.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

藤森 祥一 (FUJIMORI SHOICHI)

岡山大学・大学院自然科学研究科・准教授
研究者番号: 00452706

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし