

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年6月13日現在

機関番号：13601

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2009 ～ 2012

課題番号：21740067

研究課題名（和文） 特異性を持つ確率偏微分方程式の研究

研究課題名（英文） Research on stochastic partial differential equations with some singularities.

研究代表者

謝 賓 (XIE BIN)

信州大学・ファイバーナノテク国際若手研究者育成拠点・助教

研究者番号：50510038

研究成果の概要（和文）：様々な特異性を持っている確率偏微分方程式に関する基本問題，爆発現象，エルゴード性などの研究を行った．特に，適当なノイズが非線形放物型の偏微分方程式の爆発時刻が遅延できることを発見し，Levy型ノイズが加わった微分方程式の解に関わるマルコフ半群のBismut-Elworthy公式を拡張した．さらに，共同研究で，二次元動的ヤング図形のモデルに関する揺動問題の研究を行い，新たな確率偏微分方程式を導入した．

研究成果の概要（英文）：In this project, I mainly did some researches on fundamental problems, explosion and ergodicity for stochastic partial differential equations with different singularities. In particular, I found that appropriate noise can delay the blow-up time of a nonlinear stochastic partial differential equation, deduced the well-knowns Bismut-Elworthy formula for stochastic differential equations with Levy time noise. Moreover, as joint work, we deduced some new stochastic partial differential equations by the study of the fluctuation of two dimensional evolutionary Young diagrams.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	900,000	270,000	1,170,000
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
2011年度	600,000	180,000	780,000
2012年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
総計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般(含確率論・統計数学)

キーワード：確率論，確率解析，確率偏微分方程式，爆発時刻

## 1. 研究開始当初の背景

確率偏微分方程式は，最近盛んに研究され，現代確率論において重要なテーマである．偏微分方程式の研究のように，未解明の問題が沢山残っている．特に，

確率偏微分方程式と偏微分方程式との違いに関する研究成果があまり存在しない．数理ファイナンスの研究にて生み出されたLevy型ノイズを加える確率偏微分方程式の研究は始まるばかりである．更に，

確率偏微分方程式については主に理論的研究が多いが、その応用についてはあまり扱われない。

## 2. 研究の目的

本研究課題の主な目的はある特異性を持つ確率偏微分方程式に関する確率解析の手法で解明することです。詳しくは以下の通りです。

(1) Levy 型のノイズを無限次元微分方程式の解の存在，一意性およびエルゴード性の解析。

(2) ノイズが決定論的偏微分方程式に対する影響を解明すること。

(3) 数ベキ微分作用素を持つ確率偏微分方程式の基本的な問題の研究。

(4) 確率偏微分方程式を導出すること。確率偏微分方程式の応用として，具体的なモデルから特異性のある確率偏微分方程式を導く研究を行う。

## 3. 研究の方法

確率偏微分方程式に関連する基本文献を精読し，発表された論文を収集し，研究課題に関わる研究成果を把握し，研究の動向を見極め，研究を行いた。研究の目的を成し挙げるために，関連する基本文献・論文を読んで，理解を深めた上に，関連分野の専門家との情報交流を行い，国内外の確率偏微分方程式に関する研究会・研究セミナーなどに積極的に出席し，情報収集を行うと共に，研究成果を発表し，専門家からの意見に基づき，結果の改良を行った。特に，2010年1月から7月までの間に，イギリスのCambridge大学のNewton数理科学研究所に行われた確率偏微分方程式に関するプログラムに参加し，この分野の専門家と相談・議論でき，研究に対して大変な役

割を確実に果たした。

## 4. 研究成果

(1) Levy 型のノイズを加える偏微分方程式を考察した。まず，Levy 型のノイズを持つ無限次元微分方程式の不変測度の一意性を考察した。緩やかな条件を仮定して，この方程式の解についての強い Feller 性と既約性をそれぞれ調べ，不変測度の一意性を得ることができた。さらに強い Feller 性を証明するためには Bismut-Elworthy 型の公式を導かれた。この結果は論文にまとめ，現在雑誌に投稿中である。次に，Riesz-Feller ポテンシャルと Riemann-Liouville 微分作用素が含まれる分数ベキ微分作用素についての確率偏微分方程式の研究を行った。この分数ベキ作用素に関する基本解を厳密的に評価し，ゴウス型ノイズを付け加えて得られる分数ベキ微分方程式の解のヘルダー連続性であることを証明した。弱い条件の下で，ある瞬間力を表すジャンプ型ノイズや一般的な Levy ノイズに関する分数ベキ微分方程式の解の存在，一意性，ヘルダー連続性およびマルコフ性を調べた。

(2) 非線形放物型確率発展方程式の爆発問題の研究を行った。ある条件を満たさないと，決定的な有界領域上の非線形熱方程式の解が有界時間で爆発されることはよく知られている。自然的な問題としては適当なノイズを加えて，解の爆発時刻が遅れとなるかである。本研究は比較定理などを用いて，ゴウス型ノイズを加えることによって，解の爆発時刻がある程度で長くなることを明らかに得た。すなわち，適当なランダム揺らぎは爆発問題に対して重大な役割を果たすことが認識された。このような研究は今後も続けていきたいと思っている。

(3) 共同研究で2次元ヤング図形の時間発展

モデルに関する大偏差原理についての研究を行った。動的な二次元ヤング図形のモデルは舟木氏が2010年に共同研究で初めて界面モデルの一種として導入された。彼らは、このようなモデルに関わる流体力学極限、つまり適当な時空のスケール極限を経て非線形偏微分方程式が導かれた。その後、彼らと共同研究を行い、動的な二次元ヤング図形のモデルについての非平衡形の揺動問題、つまり、その非線形偏微分方程式の解の周辺の揺動の問題を考察し、その極限は時空ホワイトノイズが加わった確率偏微分方程式で表されるところを示した。更に、得られた確率偏微分方程式の解の存在、一意性および不変測度についても調べた。それらの研究の方法を生かして、このヤング図形のモデルに関する大偏差原理を中心として調べてきました。マルコフ過程に関する大偏差原理の研究が最近盛んになったが、我々の課題を研究するため、まずは貯水池を持つ無限区間上の非対称排他過程に関する大偏差原理を明解しなければならないと思っていますが、貯水池を持つことで、大変難しくなって、研究課題はあまり進めなかった。これについては研究課題として今後も続いて考えたいと思っている。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計7件)

- ① J-L. Wu, Bin Xie, On a Burgers type nonlinear equation perturbed by a pure jump Levy noise in  $\mathbb{R}^d$ , *Bull. Sci. Math.* (2012), no. 5, 484-506, doi:10.1016/j.bulsci.2011.07.015. (査読有)
- ② Bin Xie, Impulsive noise driven 1-dimensional higher order fractional partial differential equations, *Stoch. Anal. Appl.* 30 (2012), no. 1, 122-145, DOI:10.1080/07362994.2012.628917. (査読有)
- ③ Min Niu, Bin Xie, Impacts of Gaussian noises on the blow-up times of

nonlinear stochastic partial differential equations, *Nonlinear Anal. Real World Appl.* 13 (2012), no. 3, 1346-1352.

doi:10.1016/j.nonrwa.2011.10.011. (査読有)

- ④ Bin Xie, Uniqueness of Invariant Measures of Infinite Dimensional Stochastic Differential Equations Driven by Levy Noises, *Potential Anal.* 36 (2012), no. 1, 35-66. DOI: 10.1007/s11118-011-9220-6. (査読有)
- ⑤ Bin Xie, The growth estimates for direction dependent random fields. *Far East J. Math. Sci. (FJMS)* 44 (2010), no. 2, 181-195. (査読有)
- ⑥ M. Niu, B. Xie, Regularity of a fractional partial differential equation driven by space-time white noise. *Proc. Amer. Math. Soc.* 138 (2010), no. 4, 1479--1489. DOI: http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9939-09-10197-1. (査読有)
- ⑦ T. Funaki, B. Xie, A stochastic heat equation with the distributions of Lévy processes as its invariant measures. *Stochastic Process. Appl.* 119 (2009), no. 2, 307--326. Doi:10.1016/j.spa.2008.02.007. (査読有)

[学会発表] (計12件)

- ① B. Xie, On stochastic entropy solutions to stochastic fractal Burgers equations, IGK Probability Seminar, August 25, 2012, Bielefeld University, Germany.
- ② B. Xie, Stochastic Fractal Burgers type equations with conservation laws, June, The 5th Japanese-German International Workshop on Mathematical Fluid Dynamics, June 14, 2012, Waseda University, Japan.
- ③ B. Xie, Fluctuations in an Evolutional Model of Two-Dimensional Young Diagrams, March 19, 2012, Peking University.

- ④ B. Xie, Some limit problems to dynamics of Young diagram models, Probability Seminar, October 11, 2011, Bielefeld University, Germany.
- ⑤ B. Xie, Uniqueness of invariant measures of infinite dimensional stochastic differential equations driven by Lévy noises, 35th Conference on Stochastic Processes and their Applications, 19– 25, June, 2011, Oaxaca, Mexico, June 20, 2011.
- ⑥ B. Xie, The fluctuation for the dynamics of two dimensional Young diagrams associated with the restricted uniform statistics, April 28, 2011, Chern Institute of Mathematics, Nankai University, Tianjin, China.
- ⑦ B. Xie, Non-equilibrium fluctuations for an evolutionary model of 2-D Young diagrams, Institute of Mathematics, Academia Sinica, Taiwan, March 7, 2011.
- ⑧ B. Xie, An SPDE with the laws of Levy processes as its invariant measures, June 18, 2010, Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, UK.
- ⑨ B. Xie, Strong Feller property and irreducibility of stochastic differential equations driven by Levy noises, Feb. 25, 2010, University of Loughborough, UK.
- ⑩ B. Xie, An SPDE with the distributions of Levy processes as its invariant measures, Feb. 15, 2010, University of Manchester, UK.
- ⑪ B. Xie, Impulsive noise driven fractional partial differential

equations, VIIIth workshop on Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems, The University of Tokyo, October 7–9, 2009.

- ⑫ B. Xie, A singular SPDE and its invariant measures, Seminar in Department of Mathematics University of Tennessee, USA, April 16, 2009.

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

謝 賓 (XIE BIN)

信州大学 ・ファイバーナノテク国際若手

研究者育成拠点 ・助教

研究者番号 : 50510038