様式Ｃ－１９

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２５年５月２９日現在

機関番号：14301
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2009～2012
課題番号：21740095
研究課題名（和文）非線形波動の分散と共鳴の大域解析

研究課題名（英文）Global analysis of dispersion and resonance of nonlinear waves

研究代表者　中西　賢次（NAKANISHI KENJI）
京都大学・理学研究科・准教授
研究者番号：40322200

研究成果の概要（和文）：非線形波動を表す様々な偏微分方程式について、一般解の時空間での挙動を初期値や解の相空間における位相的情報から決定する理論を構築し、基底状態解を少し上回るエネルギーレベルまでの時空ダイナミクスを完全に分類した。それは非線形波動の典型的挙動である、散乱、孤立波、爆発と、これらの間の遷移がどのように起こるかを、方程式のみに基づいて数学的に厳密に記述したものである。

研究成果の概要（英文）：I constructed a theory to determine space-time behavior of general solutions for partial differential equations describing nonlinear waves, from the initial data and topological information on the solution in the phase space, and completely classified space-time dynamics up to an energy level slightly above that of the ground state. It is a mathematically rigorous description, based solely on the equation, of the mechanism of scattering, soliton and blow-up, which are typical behavior of nonlinear waves, and of transitions among them.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2009 年度	900,000	270,000	1,170,000
2010 年度	800,000	240,000	1,040,000
2011 年度	800,000	240,000	1,040,000
2012 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総　計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・基礎解析学
キーワード：関数方程式　関数解析　実解析

1.　研究開始当初の背景
非線形波動の方程式に対する研究は近年、本質的な非線形性を分散性評価と巧妙に組み合わせる事で、特に時空および関数空間における大域的解析での進歩が著しい。研究開始以前に得られていた具体例をとしては、

(1) Kenig-Merle はエネルギー臨界指数・集約性非線形項の方程式に対し、Bourgain のエネルギー帰納法をBahouri-Gérardのプロファイル分解を用いて捉え直す事で、変分法による解の評価とコンパクト化を組み込み、結果としてエネルギー空間の爆発解・散乱解への分割定理を与えた。

(2) Gustafson-Nakanishi-Tsai は非線形Schrodinger 方程式（以下NLS と略）の平面波解の漸近安定性を証明した。重要なア

イデアの一つは、null form などと違い代数的に単純でない分散と共鳴の競合を、Fourier 空間での特異双線形形式として捉え、調和解析で直接評価するという手法である。

(3) Masmoudi-Nakanishi はZakharov 系からNLS への特異極限を調べ、線形分散評価・双線形正則性評価、および修正非線形エネルギーによる共鳴評価を補間理論を駆使して一体に組み合わせる事で、エネルギー空間での収束結果を得た。これらは非線形評価と分散性評価を組み合わせてそれらの競合を制御するという性格は共通だが、議論の進め方はかなり異なり、大まかに言えば、非線形性の位相的解析を中心とするか、線形分散性の漸近的解析を中心とするかに大別される。
例えば(1) では、解の非線形・大域的性質については広汎に解析されるが、局所的分散性と共鳴はそれぞれStrichartz 型時空評価とvirial 型先験評価に隠されいて、プロファイル分解でのエネルギー集約以外では表に出ない。そのため、例えば共鳴が本質的な低次相互作用への拡張は容易でない。
他方(2) では、分散性とその共鳴はFourier 空間の退化非停留位相で明確に表れるが、解の本質的非線形性は、未知関数のある２次変換に利用される以外、直接には見えない。そのため、例えば分散波と進行波の群速度が分離される事は利用されず、大きな解への拡張は容易でない。
この対比は(3) において更に明確である。
我々は修正エネルギーとして、全周波数のものと共鳴周波数へ局在化したものを使って２通りの収束結果を得た。前者の方が解のクラスは広いが、情報量は乏しい。後者の方が解の挙動は詳しく分かるが、非線形相殺が崩れるため、初期値への制約が強い。

そこで私は、これらの議論を何らかの形で統合できれば、それぞれの弱点を補い非線形分散波動の解析を更に発展させる事ができ、更にそこから特異極限に沿って流体力学など近似前の偏微分方程式へ遡ることで、非線形波動の枠を超えた概念への拡張もできるのではと考えた。

２．研究の目的
非線形波動の分散と共鳴を時空大域的に調べる様々な手法の関係を調べ、それらの統合を目指す。特に、非線形積分量を用いた位相的議論による解析法と、調和解析と多重線形近似を用いた摂動的議論による解析法との相補的な結合を目指す。また、その指針として非線形分散型方程式の特異極限問題を据える。これらの研究過程と成果の双方によって、分散と共鳴それぞれの本質および関係に対する数学的理解を深め、非線形波動の大域的性質を解明していく事が第一の目的である。より具体的には、共鳴の強い低次非線形項に対する時空大域解析を関数空間でも大域的に拡張する。特に、分散性が共鳴による修正を受ける場合に、その非線形相互作用への大域的影響を解明する。関連する問題として、空間減衰が弱い非分散性成分と分散波との相互作用に関する解析も大域的に拡張する。特に進行波解などに対する位相的特徴付けとの関連を解明する。さらに、平面波、孤立波、分散波、エネルギー集約など様々な時空挙動が混在する場合について、それらの間の遷移現象や振動現象など、より複雑な時空挙動を探索する。第二の目的として、分散と共鳴についての新たな理解と手法を他の非線形偏微分方程式に利用する。具体的には、散乱理論や漸近安定性のための手法を調和写像熱流など非線形放物型方程式へ応用し、特に空間遠方での非線形共鳴の時間挙動への影響、それによる時間的振動現象などを調べる。また、水面波の KdV 方程式、NLS などによる近似を分散と共鳴の観点から見直し、従来よりも広汎な解に対する近似を求め、さらに波動より複雑な時空挙動へ理論の拡張を目指す。更にNavier-Stokes 方程式など他の流体方程式に対しても分散と共鳴、あるいは更に高次の構造を探索する。

３．研究の方法
非線形波動の分散・共鳴に対する数学的理解と、それに対する非線形・線形解析の手法の、双方における統合、およびそれらに共通する問題として特異極限問題の研究を並行で進めるが、初年度はこれらの未統合部分が比較的近い問題を多く検討し、そこでの成果を元に次年度以降理論の深化を目指す。研究支援としては海外共同研究者を中心とし、それで不足する部分はセミナーや研究集会の開催および参加によって補う。

４．研究成果
１次元の非線形波動方程式系について滑らかさの低いデータに対する初期値問題を調べ、幾つかの具体的な系について時間局所適切となる Sobolev 指数の必要十分条件をほぼ完全に決定した。適切性の証明においては、負の指数では初期条件への制限作用素が障害となる事を指摘した上でそれを回避する方法を２通り示した。特に波動写像については Keel-Tao の本質的な誤りを修正した。また非適切性の証明においては、Sobolev 空間での積評価に対する零点特異点の特殊性を利用する手法を考

案した。
　吸引的非線形項を持つKlein-Gordon 方程式についてエネルギー有限解の時間大域挙動を調べ、基底エネルギー以下の解はスケール変換の定める変分不等式によって、時間双方向爆発と時間双方向散乱の２つの解集合に分離される事を示した。またその分割はスケール冪の取り方に依存せず、更にエネルギー臨界な非線形項については閾値となる基底エネルギーを定める質量係数が元の方程式からずれ得る事、特に２次元の指数的非線形項についてはTrudinger-Moser 型不等式の最良定数によって質量係数が定まる事を示した。
　空間遠方での消散性を持つ非線形 Klein-Gordon 方程式について、非線形項が単調な反発性を持つ場合はその増大度について一様にエネルギーの指数的時間減衰が起こる事を示した。その手法は非線形の解に対し直接先験評価として指数減衰を得るため、非線形項の増大度が無条件となっただけでなく、証明は劇的に単純化された上に、減衰度については摩擦項に依る明示的な評価を与える事ができた。
　非線形 Klein-Gordon 方程式、非線形 Schrodinger 方程式、非線形波動方程式について、全ての解の時空大域挙動の分類及び初期状態からの予測を目指す研究を行った。非線形波動方程式の解は、大域的分散（散乱）、定常解、ソリトン、爆発など様々に異なる挙動を示す事が知られ、個々の場合や特殊解近傍の漸近的解析については非常に多くの研究がある。しかし、それら異なる挙動の解の相互関係や時間的遷移を、十分広い解集合（関数空間）において調べる研究はほとんど（完全可積分系など、そもそも解の挙動が豊富でない場合を除けば）無かった。本研究では、初期状態について全エネルギー値上限だけの制限の下、上記３つの典型的挙動、すなわち散乱波・ソリトン・爆発解、及びそれらの時間的遷移を全て含む、９通りの解集合への分類に成功した。具体的には、基底状態ソリトンに対する大域的な中心安定多様体及び中心不安定多様体が、エネルギー空間内の超曲面として構成され、それぞれ時間正方向と負方向の挙動を散乱領域と爆発領域へ分割し、更に中心安定多様体上の解は分散波を放射し基底状態ソリトンへと漸近する事を示した。一番の鍵は、基底状態の近傍を通過した解は二度と戻ってこれないこと（ワンパス定理と呼ぶ）である。これを用いて一部の初期値に対しては明示的に大域挙動を予測する事もでき、そこから９個の解集合が其々無限個の軌道を含む事も示される。特に、これまで特殊な方程式を除き存在すら証明されていなかった、散乱から爆発への遷移解を、エネルギー空間で安定的に構成する事に成功した。またソリトン周りの中心安定多様体の構成については、これまで線形化作用素のスペクトルについて強い仮定が必要であったが、別証明によって球対称ソリトンについてはほぼ仮定を除去することに成功した。これにより、エネルギー集約を起こす系や、さらに高エネルギーの解についても分類が進む事が期待される。
　古典的場の理論で考えられた非線形波動方程式の一種である Skyrme モデルと Adkins-Nappi モデルについて時間大域解の存在とその時刻無限大での漸近挙動を調べた。これらの方程式は波動写像（シグマモデル）が空間３次元で爆発する事を回避するため考案され、全ての解が時間大域的になる事が期待されているが、波動写像と異なり非斉次かつ準線形なので偏微分方程式としての解析は遥かに難しい。本研究では回転共変の対称性の下で自明解周りの時間大域的解析を行い、スケール解析から自然と思われる最小滑らかさのベゾフ空間で小さな大域解と散乱作用素を構成した。これらは漸近安定性の証明に向けての第１段階である。
　２次元での Sobolev 埋蔵定理の臨界対数増大を記述する、Trudinger-Moser 不等式とそれに対応する非線形波動の大域挙動について調べた。不等式については Moser による有界領域での最良不等式が有名だが全空間では成り立たない事も知られている。本研究ではその最良修正を見出し、非線形項に対する簡単な必要十分条件の形で示し、更にコンパクト性の破れも修正された最良非線形項に対してのみ起こる事を証明した。これを用いて、二乗指数型非線形項について基底状態ソリトンの時間周波数または質量係数に制限がつく現象について、それが起こるための必要十分条件を与え、更に係数の制限値と不等式の最良定数を対応をさせた。更に非線形 Klein-Gordon 方程式が質量変位により基底状態を失う場合に、本来基底状態があるはずのエネルギー準位の解の時間大域挙動を完全に決定した。
　非線形波動方程式の解の時間大域挙動の分類（基底状態を若干超えるまでのエネルギー範囲における散乱、爆発、ソリトンへの分類）についての研究を更に進め、特にSobolev 臨界（無質量）の場合の結果を球対称で無い解にまで拡張した。証明方法は解の分解方法を含めて球対称解に対しても改良した。特に空間遠方で減衰の遅いソリトン多様体へ、通常とは異なる非直交の射影を用いる所がポイントである。
　プラズマ波動を記述する Zakharov 方程式系の解の大域挙動について調べた。この方程式は亜音速極限で非線形

Schrodinger方程式へ移行するが、Schrodingerと波動方程式の系になっているため、３次元で初期値問題から大域挙動を解析する事がこれまでできなかった。本研究では球対称の仮定の下、エネルギー空間で小さな解が自由解へ漸近する事を証明した。

さて上記の、解の大域挙動分類における基本的描像では、大域的分散性を示す解の集合と、有限時間爆発の解集合の境界が、基底状態ソリトンの中心安定多様体になる。この超曲面は、ソリトン周りの線形化発展方程式の分散性を用いて構成できるが、それには中心安定スペクトルも詳しい評価が必要で、応用上の制約が著しい。またこの方法で超曲面上に得られた解はソリトンへ散乱するが、エネルギー臨界の非線形項では、基底状態近傍に留まりつつエネルギー集約で爆発する解も知られている。これらの問題を解決するため、多様体上の解の挙動を調べずに、２つの解挙動の境界を直接求める手法も開発した。この方法では中心安定スペクトルの情報が殆ど無くても境界面を構成でき、臨界型のエネルギー集約爆発もその中に含まれる。これで臨界型方程式の大域ダイナミクスを劣臨界と同じ描像に嵌め込み、その完全な分類も視野に入れる事ができた。

また、上記研究成果の理論では、エネルギーの解析を基本としているため、解の関数空間を勝手に選べない。そのため非線形項が分散性に比べて強い場合、特に低次元低次項は難しくなる。そのモデルケースとして、２次非線形項を持つ Zakharov 方程式および、Klein-Gordon-Zakharov 方程式の解の大域挙動を調べた。これらの方程式では非線形共鳴が周波数上で局在化する。この特徴を利用するため、normal form の手法で非共鳴相互作用を３次に書き換え、共鳴部分は解に球対称性を仮定して評価し、更に分散性と爆発性への解分類を実行した。球対称は制約として強いが、方程式の適用範囲を広げる意味では重要な一歩と言える。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 17　件）

① Joachim Krieger, Kenji Nakanishi, Wilhelm Schlag, Global dynamics above the ground state energy for the one-dimensional NLKG equation, Math. Z., 272(2012), 297-316, 10.1007/s00209-011-0934-3. 査読有

② Joachim Krieger, Kenji Nakanishi, Wilhelm Schlag, Global dynamics of the nonradial energy-critical wave equation above the ground state energy, Discrete Contin. Dyn. Syst., 33(2013), 2423-2450, 10.3934/dcds.2013.33.2423. 査読有

③ Kenji Nakanishi, Wilhelm Schlag, Invariant Manifolds Around Soliton Manifolds for the Nonlinear Klein-Gordon Equation, SIAM J. Math. Anal., 44(2012), 1175-1210, 10.1137/11082720X. 査読有

④ Zihua Guo, Kenji Nakanishi, Shuxia Wang, Global dynamics below the ground state energy for the Zakharov system in the 3D radial case, Adv. Math., 238(2013), 412-441, 10.1016/j.aim.2013.02.008. 査読有

⑤ Slim Ibrahim, Nader Masmoudi, Kenji Nakanishi, Scattering threshold for the focusing nonlinear Klein-Gordon equation, Analysis & PDE, 4(2011), 405-460, 10.2140/apde.2011.4.405. 査読有

⑥ K.Nakanishi, W.Schlag, Global dynamics above the ground state energy for the cubic NLS equation in 3D, Calculus of variations and Partial differential equations, 44(2012), 1-45, 10.1007/s00526-011-0424-9. 査読有

⑦ K.Nakanishi, W.Schlag, Global Dynamics Above the Ground State for the Nonlinear Klein-Gordon Equation Without a Radial Assumption, Archive for rational mechanics and analysis, 203(2012), 809-851, 10.1007/s00205-011-0462-7. 査読有

⑧ Shuji Machihara, Kenji Nakanishi, Kotaro Tsugawa, Well-posedness for nonlinear Dirac equations in one dimension, Kyoto Journal of Mathematics, 50(2010), 403-451, 査読有

⑨ Nader Masmoudi, Kenji Nakanishi, From the Klein-Gordon-Zakharov system to a singular nonlinear Schrodinger system, 27(2010), 1073-1096, 査読有

⑩ Nader Masmoudi, Kenji Nakanishi, Two asymptotic problems for a singular nonlinear Schrodinger system, American Journal of Mathematics, 132(2010), 1311-1336, 査読有

⑪ Stephen Gustafson, Kenji Nakanishi, Tai-Peng Tsai, Asymptotic stability, concentration, and oscillation in harmonic map heat-flow, Landau-Lifshitz, and Schrodinger

maps on R^2, Communications in Mathematical Physics, 300(2010), 205-242, 査読有

⑫ Kenji Nakanishi, Hideo Takaoka, Yoshio Tsutsumi, Local well-posedness in low regularity of the mKdV equation with periodic boundary condition, Discrete and continuous dynamical systems, 28(2010), 1635-1654, 査読有

⑬ Kenji Nakanishi, Wilhelm Schlag, Global dynamics above the ground state energy for the focusing nonlinear Klein-Gordon equation, Journal of Differential Equations, 250(2010), 2299-2333. 査読有

⑭ Lassad Aloui, Slim Ibrahim, Kenji Nakanishi, Exponential energy decay for damped Klein-Gordon equation with nonlinearities of arbitrary growth, Communications in Partial Differential Equations, 36(2010), 797-818, 査読有

⑮ Nader Masmoudi and Kenji Nakanishi, Uniqueness of Solutions for Zakharov System, Funkcialaj Ekvacioj, 52(2009), 233-253. 査読有

⑯ Slim Ibrahim, Mohamed Majdoub, Nader Masmoudi, and Kenji Nakanishi, Scattering for the two-dimensional energy-critical wave equation, Duke Math. J., 150(2009), 287-329. 査読有

⑰ Stephen Gustafson, Kenji Nakanishi and Tai-Peng Tsai, Scattering theory for the Gross-Pitaevskii equation in three dimensions, Commun. Contemp. Math., 11(2009), 657-707. 査読有

〔学会発表〕(計 11 件)

① Kenji Nakanishi, Global dynamics of nonlinear dispersive equations, MSJ-KMS Joint Meeting 2012, 2012 年 09 月 17 日～2012 年 09 月 17 日, 九州大学

② Kenji Nakanishi, Global dynamics beyond the ground state energy for nonlinear dispersive equations, Journees EDP 2012, 2012 年 06 月 04 日～2012 年 06 月 08 日, Domaine de Francon (フランス)

③ Kenji Nakanishi, Global dynamics of the 3D Zakharov system, Nonlinear Hamiltonian PDEs, 2012 年 07 月 01 日～2012 年 07 月 06 日, Centro Stefano Franscini (スイス)

④ Kenji Nakanishi, Global dynamics of the 3D Zakharov system, Nonlinear PDE's @ IMPA, 2012 年 07 月 30 日～2012 年 08 月 03 日, Instituto Naciaonal de Matematica Pura e Aplicada (ブラジル)

⑤ Kenji Nakanishi, Global dynamics above the unstable ground state for nonlinear dispersive equations, Asymptotic dynamics driven by solitons and trvaling fronts in nonlinear PDE, 2011 年 7 月 15 日, Santiago(チリ)

⑥ Kenji Nakanishi, Global dynamics beyond the ground state energy for nonlinear Klein-Gordon equation, Harmonic analysis and PDE, 2010 年 8 月 18 日, Seoul National University(韓国)

⑦ Kenji Nakanishi, Global dynamics beyond the ground energy for the focusing nonlinear Klein-Gordon equation, The 19th Workshop on Differential Equations and Its Applications, 2011 年 1 月 15 日, National Cheng Kung University(台湾)

⑧ Kenji Nakanishi, Exponential decay for damped semilinear wave equation in the critical and the supercritical cases, Nonlinear waves and dispersion, 2009 年 4 月 27 日, Institut Henri Poincare (フランス)

⑨ Kenji Nakanishi, Asymptotic stability and eternal oscillation of harmonic maps in Schrodinger and heat flows, Nonlinear Partial Differential Equations, 2009 年 8 月 10 日, Zhangjiajie(中国)

⑩ Kenji Nakanishi, Asymptotic stability and eternal oscillation of harmonic maps in Schrodinger and heat flows, Nonlinear dispersive and geometric evolution problems: singularities and asymptotics, 2009 年 8 月 17 日, UBC(カナダ)

⑪ Kenji Nakanishi, Scattering threshold for the focusing nonlinear Klein-Gordon equation, International Workshop on Differential Equations and Their Applications, 2009 年 12 月 19 日, Tainan(台湾)

〔図書〕(計 1 件)

① Kenji Nakanishi, Wilhelm Schlag, "Invariant manifolds and dispersive Hamiltonian evolution equations", 2011, European Mathematical Society, 253pp.

６．研究組織

(1)研究代表者

中西　賢次（NAKANISHI KENJI）
京都大学・理学研究科・准教授
研究者番号：40322200

(2)研究分担者

（　　）

研究者番号：

(3)連携研究者

（　　）

研究者番号：