

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年6月19日現在

機関番号：51201

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2009～2011

課題番号：21740121

研究課題名（和文） 連分数展開が織り成す多彩なジーゲル円板の境界の解明

研究課題名（英文） Elucidation of the boundary of various Siegel disks
influenced by continued fraction expansions

研究代表者

片方 江 (KATAGATA KOH)

一関工業高等専門学校・一般教科自然科学系・講師

研究者番号：10529598

研究成果の概要（和文）：

2009年度：特別な超越整函数に対して、『回転数が有界型のジーゲル円板の境界は擬円周である』を得た。またその系として、考察した特別な超越整函数の対数持ち上げは、境界が擬円周である遊走領域を持つことが分かった。

2010年度：『回転数が有界型のジーゲル円板の境界は擬円周である』を満たす超越整函数の具体例を構成した。また、整函数全体の集合に力学系を考慮した位相を導入し、その位相における函数の摂動に対するジーゲル円板の変化を考察した。

2011年度：微分方程式の定性的理論と複素力学系との間に密接な関連があることが分かり、複素力学系における(超)吸引的周期点・放物的周期点・ジーゲル点・クレマー点と微分方程式における平衡点について研究を行った。

研究成果の概要（英文）：

2009y : We obtained that for some transcendental entire functions, "the boundary of Siegel disks whose rotation number was of bounded type was a quasicircle".

We obtained that the logarithmic lift of these transcendental entire functions had a wandering domain whose boundary was a quasicircle as a corollary.

2010y : We constructed some transcendental entire functions satisfying that "the boundary of Siegel disks whose rotation number was of bounded type was a quasicircle". We introduced a topology on the set of all entire functions respecting dynamics and we studied variation of Siegel disks for small perturbation with respect to the topology.

2011y : We comprehended the relationship between the qualitative theory of differential equations and complex dynamics, and we studied that (super) attracting periodic points, parabolic periodic points, Siegel points and Cremer points for complex dynamics and equilibrium points for differential equations.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	900,000	270,000	1,170,000
2010年度	600,000	180,000	780,000
2011年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総計	2,100,000	630,000	2,730,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：複素力学系・ジーゲル円板・連分数展開

1. 研究開始当初の背景

ジーゲル円板の境界に関する多くの研究は、回転数と呼ばれる無理数を連分数展開し、そこに現れる整数列の発散スピード（発散しない場合もある）をもとに、複素解析・解析数論・力学系理論等を用いて行われてきた。当時の先行研究により、以下のことが分かっていた；

(1) 多項式のジーゲル円板の回転数が2次ディオファントス数ならば、その境界は臨界点を含む擬円である。（擬円はジョルダン曲線である）

(2) 2次多項式のジーゲル円板の回転数がある算術的条件を満たすならば、その境界は臨界点を含むデイヴィッド円である。（デイヴィッド円はジョルダン曲線である）(3) 滑らかな境界をもつ2次多項式のジーゲル円板が存在する。このとき境界は臨界点を含まないジョルダン曲線である。(4) ある条件を満たす指数関数のジーゲル円板の回転数が有界型無理数ならば、その境界は臨界点を含む擬円である；

いずれの研究結果もジーゲル円板の境界がジョルダン曲線であるという結論を得ていた。しかし、(1)は多項式に関する結果、(2)と(3)は2次多項式に関する結果であり、一般の有理関数に関しては言及していなかった。研究代表者は過去の研究で(1)の結果を多項式を含む特殊なクラスの有理関数まで拡張していた。また、(2)と(3)については一般の有理関数のみならず、一般の多項式に対する考察も行われておらず、研究当初の課題であった。(4)は超越整関数に関する結果であるが、こちらも一般の超越整関数に結果を拡張することが課題となっていた。

2. 研究の目的

本研究は正則写像の複素力学系における単連結回転領域（ジーゲル円板）の境界に関する未解決問題『ジーゲル円板の境界はいつジョルダン曲線になるか？』に焦点を絞り、複素解析・解析数論・力学系理論等を用いて、この未解決問題にアプローチする研究である。一見単純に見えるジーゲル円板であるがその境界は非常に複雑で、無理数の連分数展開と密接な関わりをもっている。その複雑さゆえジーゲル円板の境界がジョルダン曲線であるかどうかさえ一般には分かっていない。複素平面に作用する超越整関数の力学系では、境界がジョルダン曲線ではないジーゲル円板の存在が確認されている。一方、リーマン球面に作用する有理関数の力学系では、そのような反例は見つかっておらず、『有理関数のジーゲル円板の境界は常にジョルダン曲線か？』という問題も未解決である。本研究では、『ジーゲル円板の回転数』と『ジーゲル円板の境界の位相的・幾何的性質』との関連性を明らかにするとともに、上記問題の解決を目標とし

た。先行研究の結果を考慮すると、ジーゲル円板の境界が臨界点を含んでいる場合と含んでいない場合とがあることが分かる。

このことを踏まえて、『ジーゲル円板の境界が臨界点を含んでいる場合(Type 1)』と『ジーゲル円板の境界が臨界点を含んでいない場合(Type 2)』との二種類にジーゲル円板を分類した。研究期間内は有理関数と超越整関数を研究対象とし、以下の具体的な問題を設定した；

(A) ジーゲル円板の回転数が2次ディオファントス数ならば、その境界は臨界点を含む擬円であるか？(B) ジーゲル円板の回転数がある算術的条件を満たすならば、その境界は臨界点を含むデイヴィッド円であるか？；本研究では臨界点を含んでいるジーゲル円板の境界(Type 1)の解明を目的とした。特に、問題(A)と(B)の解決を優先的に行った。

3. 研究の方法

本研究の目的である『臨界点を含んでいるジーゲル円板の境界(Type 1)の解明』を達成するために、次の問題解決を優先させた；(A) ジーゲル円板の回転数が2次ディオファントス数（有界型無理数）ならば、その境界は臨界点を含む擬円であるか？(B) ジーゲル円板の回転数がある算術的条件を満たすならば、その境界は臨界点を含むデイヴィッド円であるか？；

問題(B)のもととなる結果は2次多項式のみのものであり、一般の有理関数または超越整関数に結果を拡張することは容易ではない。一方、問題(A)のもととなる結果は任意の次数を持つ多項式に関する結果であり、研究代表者その結果を特殊なクラスの有理関数に拡張している。そこで、それまでの研究経験を活かし、問題(A)の解決を第一目標とした。その後、得られた結果・手法を応用して問題(B)の解決を目指した。また、研究を円滑に進めるために、コンピュータによる数値実験は必須である。研究代表者が独自に作成したプログラムを用いて、ジーゲル円板を視覚化することで、研究活動の一層の充実を図り、効果的に研究を進めた。

4. 研究成果

2009年度：回転数が有界型のジーゲル円板を持つ超越整関数について研究を行った。近年、回転数が有界型である有理関数のジーゲル円板の境界は擬円周（すなわち、ジョルダン曲線）となっていることが証明されている。研究代表者は特別な超越整関数に対して同様の結果、『回転数が有界型のジーゲル円板の境界は擬円周である』を得た。またその系として、考察した特別な超越整関数の対数持ち上げは境界が擬円周である遊走領域を持つことが分かった。研究の成果は① 2009年 日本数学会 秋季総合分科会（大阪大学，9月）及び② 複素力学系とその関連分野の総合的研究（京都大学，12月）にて研究報告を行った。また，研究分野に関連する研究集会及びセミナーに参加し，情報交換・研究打ち合わせを行い，そこで得た情報を研究に役立てた。

2010年度：2009年度と同様に回転数が有界型のジーゲル円板を持つ超越整関数について研究を行った。研究代表者は『回転数が有界型のジーゲル円板の境界は擬円周である』を満たす超越整関数の具体例を構成した。また，整関数全体の集合に力学系を考慮した位相を導入し，その位相における関数の摂動に対するジーゲル円板の変化を考察した。研究の成果は①複素力学系その周辺分野の研究（京都大学，12月）にて研究報告を行った。また，研究分野に関連する研究会及びセミナーに参加し，情報交換・研究打ち合わせを行い，そこで得た情報を研究に役立てた。

2011年度：2009年度・2010年度と同様に回転数が有界型のジーゲル円板を持つ超越整関数について研究を行った。回転数が有界型のジーゲル円板で境界が擬円周となるような超越整関数の具体例についての論文『Dynamics of transcendental entire functions with Siegel disks and its applications』がBulletin of the the Korean Mathematical Society に掲載された。また，これまでの研究の過程で，微分方程式の定性的理論と複素力学系との間に密接な関連があることが分かり，複素力学系における超吸引的周期点・吸引的周期点・放物的周期点・ジーゲル点（ジーゲル円板の中心）・クレーマー点と微分方程式における平衡点について研究を行った。研究の成果は①複素力学系の総合的研究（京都大学，1月）にて研究報告を行った。また，研究分野に関連する研究会及びセミナーに参加し，情報交換・研究打ち合わせを行い，そこで得た情報を研究に役立てた。

5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計2件）

(1) 著者名：Koh Katagata
論文標題：Dynamics of transcendental entire functions with Siegel disks and its applications
雑誌名：Bulletin of the Korean Mathematical Society
査読の有無：有
巻：48(4)
発行年：2011
ページ：713--724

(2) 著者名：Koh Katagata
論文標題：Siegel disks and wandering domains of transcendental entire functions
雑誌名：数理解析研究所講究録
査読の有無：無
巻：1699
発行年：2010
ページ：25--29

〔学会発表〕（計4件）

(1) 発表者名：Koh Katagata
発表標題：微分方程式の定性的理論と複素力学系
学会等名：複素力学系の総合的研究
発表年月日：2012年1月23日
発表場所：京都大学

(2) 発表者名：Koh Katagata
発表標題：Limits of entire functions with respect to some metric
学会等名：複素力学系とその周辺分野の研究
発表年月日：2010年12月7日
発表場所：京都大学

(3) 発表者名：Koh Katagata
発表標題：Siegel disks and wandering domains of transcendental entire functions
学会等名：複素力学系とその関連分野の総合的研究
発表年月日：2009年12月15日
発表場所：京都大学

(4) 発表者名：Koh Katagata
発表標題：Examples of entire functions with wandering domains
学会等名：2009年 日本数学会 秋季総合分科会
発表年月日：2009年9月26日
発表場所：大阪大学

[その他]

ホームページ等

- (1) <http://www.ichinoseki.ac.jp/gene/katagata/research.html>
- (2) <http://researchmap.jp/koh.katagata>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

片方 江 (KATAGATA KOH)

一関工業高等専門学校・一般教科自然科学系
・講師

研究者番号：10529598

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし

(4) 研究協力者

中西 敏浩 (NAKANISHI TOSHIHIRO)

島根大学・総合理工学部・教授

研究者番号：00172354

鬼塚 政一 (ONITSUKA MASAKAZU)

都城工業高等専門学校・一般科目・講師

研究者番号：20548367