

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 6 月 7 日現在

機関番号：32601  
 研究種目：若手研究（B）  
 研究期間：2009～2012  
 課題番号：21740126  
 研究課題名（和文）パンルヴェ系の特殊解の構成と無限次元可積分系の探索  
 研究課題名（英文）Construction of special solutions to Painlevé systems and the quest for infinite-dimensional integrable systems  
 研究代表者  
 増田 哲（MASUDA TETSU）  
 青山学院大学・理工学部・准教授  
 研究者番号：00335457

研究成果の概要（和文）：離散パンルヴェ系の種々の特殊解を構成した。特に、それらのtau函数を完全に決定し、特殊解として現れる函数の諸性質について、方程式のアフィンワイル群対称性の観点から説明を与えた。また、応用として、第6パンルヴェ方程式の超幾何型特殊函数解の明示公式を用いて、離散冪函数の明示公式を構成した。さらには、高階パンルヴェ系の離散類似やそれらの特殊解の構成にとりくみ、新たな無限次元可積分系の構成に向けた端緒を開いた。

研究成果の概要（英文）：We constructed several special solutions to the discrete Painlevé systems. We determined the tau-functions of the solutions completely, and gave a natural description for some properties of the functions that appear as the solutions from the viewpoint of the affine Weyl group symmetry. We also constructed an explicit formula for the discrete power function in terms of the hypergeometric type solutions to the sixth Painlevé equation. Moreover, we tried to construct a discrete analogue and special solutions of the higher-order Painlevé systems to pave the way for discovering new infinite dimensional integrable systems.

## 交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2010年度	700,000	210,000	910,000
2011年度	700,000	210,000	910,000
2012年度	700,000	210,000	910,000
年度			
総計	3,100,000	930,000	4,030,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：可積分系

## 1. 研究開始当初の背景

パンルヴェ系および離散パンルヴェ方程式をワイル群対称性の観点から捉えることにより、それらを高次元（高階）へ拡張する試みが幾つかなされていた。しかしながら、

これらの高階パンルヴェ系の特殊解については、まったくといってよいほど研究がなされておらず、背後にどのような無限次元可積分系が存在するのかも、一部を除いてほとんど明らかにされていなかった。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、パンルヴェ方程式や離散パンルヴェ方程式およびそれらの種々の一般化に対して、特殊解や対称性についての具体的な知見を積み上げつつ、それらの背後にある（あるいはあるべき）無限次元可積分系を探索し、さらにはその解空間の構造や対称性を明らかにすることである。

## 3. 研究の方法

E型アフィンワイル群対称性をもつ離散パンルヴェ方程式の特殊解についての研究を推し進めた。とりわけ、それらのtau関数の決定という問題に集中に取り組んだ。その一方で、高階パンルヴェ型微分方程式やガルーニエ系（およびその離散類似）の無限次元可積分系との関係についての研究の進展状況を詳しく把握、分析した。その後、こうした研究を踏まえ、高階  $q$ -パンルヴェ系や高階パンルヴェ型微分方程式の特殊解の構成およびそれらを通じた新しい無限次元可積分系の探索を行った。

## 4. 研究成果

まず、論文として公表された主な研究結果は以下の通りである。

- (1)  $E_7^{(1)}$ 型  $q$ -パンルヴェ系の超幾何型特殊関数解のtau関数を完全に決定した。カゾラチ行列式表示において、その要素は  $q$ -超幾何関数  $sW_7$  で与えられる。  $q$ -超幾何関数  $sW_7$  の変換公式やいわゆる「12個の解」は、元のパンルヴェ系のワイル群対称性から説明される。また、 $sW_7$  が満たす隣接関係式は、パンルヴェ系の双線形関係式から説明される。
- (2)  $E_8^{(1)}$ 型  $q$ -パンルヴェ系の超幾何型特殊関数解のtau関数を完全に決定した。カゾラチ行列式表示において、その要素は Rahman の  $q$ -超幾何積分  ${}_{10}I_9$  で与えられる。  $q$ -超幾何積分の Bailey 変換やいわゆる「56個の解」は、元のパンルヴェ系のワイル群対

称性から説明される。また、 ${}_{10}I_9$  が満たす隣接関係式は、パンルヴェ系の双線形関係式から説明される。

- (3) Bobenko および Pinkall により提出された離散冪関数に対し、第6パンルヴェ方程式の超幾何型特殊解のtau関数を用いた明示公式を与え、離散冪関数の定義域として自然な離散リーマン面を導入した。さらに、離散冪関数のはめ込みであることの必要十分条件を与えた。離散冪関数が満たすと期待される諸性質について、明示公式を用いて明らかにすることが今後の課題である。
- (4) 離散 Schwarzian KdV 方程式とその特殊解について考察した。まず、離散 Schwarzian KdV 方程式が離散 Schwarzian KP 方程式の簡約として得られることを示し、それを利用して離散 Schwarzian KP 方程式および離散 Schwarzian KdV 方程式のソリトン解および分子解を構成した。また、 $(A_1+A_2)^{(1)}$ 型離散パンルヴェ系および第6パンルヴェ方程式について、それらのtau関数を用いた離散 Schwarzian KdV 方程式の特殊解を構成した。

これらに加え、以下の研究に取り組んだ。

- (1)  $D_5^{(1)}$ 型  $q$ -パンルヴェ系の超幾何型特殊関数解のtau関数の構成と離散冪関数の  $q$ -類似の構成の試み
- (2) パンルヴェ方程式の有理解を特徴づける特殊多項式の判別式についての研究
- (3)  $E_7^{(1)}$ 型  $q$ -パンルヴェ系のある種の有理解の構成
- (4)  $D_5^{(1)}$ 型笹野系と呼ばれる4階パンル

ヴェ型常微分方程式系のある種の有理解の構成

- (5) 笹野系の  $q$ -類似の構成
- (6) 任意の素数冪を法とする二項係数で定まるフラクタル図形のハウスドルフ次元に関する研究

これらについては、その多くが論文発表には至っていないものの、興味深い結果を得つつある。特に、 $E_7^{(1)}$ 型  $q$ -パンルヴェ系および笹野系の有理解についての研究で得られつつある結果は、新たな無限次元可積分系の存在を強く示唆するものである。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計6件)

1. 増田哲, 笹野系の  $q$ -類似について, 九州大学応用力学研究所 研究集会報告 24A0-S3, 「非線形波動研究の最前線 - 構造と現象の多様性 -」 (2013) 71-76, 査読有
2. 岩尾慎介, 増田哲, 二項係数と Sierpinski 三角形, 九州大学応用力学研究所 研究集会報告 23A0-S7, 「非線形波動研究の進展 - 現象と数理の相互作用 -」 (2012) 1-6, 査読有
3. Mike Hay, Kenji Kajiwara and Tetsu Masuda, Bilinearization and special solutions to the discrete Schwarzian KdV equation, Journal of Math-for-Industry, 査読有, Vol. 3, 2011, 53-62.
4. Tetsu Masuda, Hypergeometric tau-functions of the  $q$ -Painlevé system of type  $E_8^{(1)}$ , The Ramanujan Journal, 査読有, Vol. 24, 2011, 1-31.
5. 増田哲, 離散冪函数の明示公式, 九州大学応用力学研究所 研究集会報告 22A0-S8, 「非線形波動研究の新たな展開現象とモデル化」 (2011) 56-61, 査読無
6. Tetsu Masuda, Hypergeometric tau-functions of the  $q$ -Painlevé system of type  $E_7^{(1)}$ , Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications Vol. 5, Paper 035, 2009 査読有

[学会発表] (計21件)

1. 増田哲, 笹野系の  $q$ -類似, 日本数学会・無限可積分系セッション, 2013. 3. 22, 京都大学
2. Tetsu Masuda, A  $q$ -analogue of the higher order Painlevé type equations with  $W(D_1^{(1)})$ -symmetry, China-Japan Joint Workshop on Integrable Systems, 2013. 3. 17, Kyoto University, Japan
3. 増田哲, D型アフィン Weyl 群対称性をもつ高階  $q$ -差分方程式, アクセサリー・パラメーター研究会, 2013. 3. 16, 熊本大学
4. 増田哲, D型アフィンワイル群対称性をもつ高階  $q$ -パンルヴェ系, 超幾何方程式研究会 2013, 2013. 1. 5, 神戸大学
5. 増田哲, 笹野系の  $q$ -類似, 青山数理セミナー, 2012. 12. 19, 青山学院大学
6. Tetsu Masuda, An explicit formula for the discrete power function associated with circle patterns of Schramm type, Various Aspects on the Painlevé Equations, 2012. 11. 29, RIMS, Kyoto University, Japan
7. 増田哲, 笹野系の  $q$ -類似について, 非線形波動研究の最前線 - 構造と現象の多様性 -, 2012. 11. 3, 九州大学応用力学研究所
8. 増田哲, 笹野系の  $q$ -類似について, 函数方程式論サマーセミナー, 2012. 8. 10, KKR 蔵王 白銀荘
9. 岩尾慎介, 増田哲, 二項係数と Sierpinski 三角形, 非線形波動研究の進展 - 現象と数理の相互作用 -, 2011. 10. 27, 九州大学応用力学研究所
10. 増田哲, D型高階  $q$ -Painlevé 系について, 函数方程式論サマーセミナー, 2011. 8. 5, 休暇村 支笏湖
11. Tetsu Masuda, An explicit formula for the discrete power function associated with circle patterns of Schramm type, Infinite Analysis 11 -- Frontier of Integrability --, 2011. 7. 27, University of Tokyo, Japan
12. 増田哲, 離散冪函数の明示公式, 日本数学会・無限可積分系セッション,

2011. 3. 23, 早稲田大学

13. 増田哲, 離散冪函数の明示公式, 超幾何方程式研究会 2011, 2011. 1. 6, 神戸大学
14. 増田哲, 離散冪函数の明示公式, 九州可積分系セミナー, 2010. 11. 12, 九州大学
15. 増田哲, 離散冪函数の明示公式, 非線形波動研究の新たな展開—現象とモデル化—, 2010. 10. 29, 九州大学応用力学研究所
16. 増田哲, 離散冪函数と Painlevé VI 方程式の超幾何函数解, 函数方程式論ワークショップ, 2010. 7. 26, 東京大学大学院数理学研究科
17. 増田哲, Painlevé 系の対称性と特殊解, デジタル解析学セミナー, 2010. 1. 27, 早稲田大学
18. Tetsu Masuda, The anti-self-dual Yang-Mills equation and the third Painlevé equation, China-Japan Joint Workshop on Integrable Systems on the occasion of Prof. Hirota's 77th Birthday, 2010. 1. 9, Shaoxing Yonghe Manor Resort Hotel, Shaoxing
19. 増田哲, ASDYM 方程式と Ernst 方程式, ASDYM 方程式と Painlevé III 方程式, 自己双対 Yang-Mills 方程式の数理と可積分構造, 2009. 11. 8, 名古屋大学
20. 増田哲, 梅村多項式の判別式について, 函数方程式論サマーセミナー, 2009. 8. 2, かんぽの宿 鳥羽
21. 増田哲, Discriminants of Umemura polynomials associated with  $P_v$ , Workshop on Accessory Parameters, 2009. 6. 21, 東京大学玉原国際セミナーハウス

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

増田 哲 (MASUDA TETSU)

青山学院大学・理工学部・准教授

研究者番号 : 00335457