

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 6月 11日現在

機関番号：12601

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2009～2011

課題番号：21760057

研究課題名（和文） 組合せ的行列理論を用いた数理計画の構造解析

研究課題名（英文） Structural Analysis of Mathematical Programming based on Combinatorial Matrix Theory

研究代表者

垣村 尚徳（KAKIMURA NAONORI）

東京大学・教養学部・特任講師

研究者番号：30508180

研究成果の概要（和文）：数理計画法とはある制約の下で最もよい解を見つけるための方法論であり、オペレーションズ・リサーチなどの様々な工学分野で必要となる。一方の組合せ的行列理論は、行列要素の正負零などの非数値情報を利用した解析手法であり、大規模な線形方程式系を解く際に有用である。本研究課題では、数理計画問題に対して、問題の持つ非数値情報を利用することでその構造を組合せ的に解析した。さらに、組合せ的行列理論の枠組みを数理計画法という応用の観点から発展させた。

研究成果の概要（英文）：Mathematical programming is a branch of mathematics concerned with optimization problems, in which one aims to find the best solution subject to some constraints, and it can be applied to a variety of engineering fields such as operations research. Combinatorial matrix theory is an approach to understand matrix structure using combinatorial methodology, which is useful for structural analysis of large linear systems in practice. In this research, we have analyzed mathematical programming problems based on combinatorial properties such as sign patterns or sparsity. In addition, we have developed combinatorial matrix theory in terms of mathematical programming applications.

交付決定額

（金額単位：円）

| | 直接経費 | 間接経費 | 合計 |
|--------|-----------|---------|-----------|
| 2009年度 | 1,200,000 | 360,000 | 1,560,000 |
| 2010年度 | 1,100,000 | 330,000 | 1,430,000 |
| 2011年度 | 1,000,000 | 300,000 | 1,300,000 |
| 年度 | | | |
| 年度 | | | |
| 総計 | 3,300,000 | 990,000 | 4,290,000 |

研究分野：数理最適化

科研費の分科・細目：応用物理学・工学基礎

キーワード：組合せ最適化，定性的行列理論，疎性，マッチング，グラフアルゴリズム，点素サイクル

1. 研究開始当初の背景

組合せ的行列理論とは、行列要素の零・非零などの非数値的な情報に着目して計算の効率化をはかる行列計算手法であり、主にシステム解析の分野で発展してきた。応用に現

れるような大規模なシステムでは、行列の数値的な情報を使った計算を行うと丸め誤差など計算誤差が生じてしまうことが避けられない。それを防ぐためには、非数値的な（構造的な）情報を活用し、できるだけ数値的計

算の負担を減らし計算する手法が有用となる。構造的な情報はグラフなどを用いて表現できるため、マトロイド理論・グラフ理論などの組合せ的手法が利用することで、計算誤差に対して安定で高速なアルゴリズムが設計できる。

組合せ的行列理論の中で、行列要素の正負零という符号情報を用いるものは定性的行列理論と呼ばれ、1940年代に経済モデルを定性的に解析するために提案された。定性的行列理論は、グラフ理論とも関連が深く、また統計物理学にも応用があるなど、分野横断的に研究されてきた。2000年代に入り、グラフ理論の発展とともに、計算機科学の観点からも注目されるようになってきている。

一方、数理計画法はある制約の下で最もよい解を見つけるための方法論であり、オペレーションズ・リサーチなどの様々な工学分野で必要となる。近年、計算機性能の向上やアルゴリズムの改良により、より広いクラスの数理計画問題が効率的に計算可能となり、実用上の有用性が増している。本研究は、入力数値の正負零など、問題の構造のみによって決まる情報を有効に利用することで、数理計画問題の構造を解明し、高速な組合せ的解法の設計することを目指す。

2. 研究の目的

本研究課題では、従来システム解析の分野で発展してきた組合せ的行列理論を、別の分野である数理計画法に用いることで、その構造を解析し計算効率化をはかる。また、数理計画法という新しい応用の視点から組合せ的行列理論を発展させることを目指す。

3. 研究の方法

本研究課題の目的は、組合せ的行列理論を始めとする構造解析手法を用いて、数理計画問題の構造の解析を行うことであった。そのためには、数理計画法・線形代数・グラフ理論など様々な分野を融合する必要がある。

まず、研究代表者のこれまでにやってきた、組合せ的行列理論に関する知見を発展させ、数理計画問題に現れる符号情報や疎性などの組合せ的性質に着目した解析を行った。また、定性的行列理論はグラフのサイクルやマッチングなどグラフ理論と深い関連があるので、これらの文献を調査し、関連する問題について共同研究者と議論を行った。そして、グラフマイナー理論に代表される構造的グラフ理論の成果を取り入れることで、サイクル詰め込み問題とその一般化の解析を行った。その一方で、組合せ最適化問題に現れる特殊な数理計画問題に対して、その整数ギャップや解の構造などを解析した。

4. 研究成果

(1) 行列の符号情報や疎性などの組合せ的性質を用いて、数理計画問題の構造解析を行った。

① Pólya の問題は線形方程式の符号可解性判定と等価な問題であり、組合せ的行列理論において重要な問題である。本研究課題では Pólya の問題を長方形列へ一般化した問題を提案した。これは、数理計画問題が符号可解であるための十分条件となるなど、数理計画問題の構造解析において重要な役割を果たしている。本研究では、その多項式可解性を示すと同時に、禁止マイナーによる特徴付けを与えた。

② コーダル構造を持つ半正定値対称行列は極大クリークに対応する半正定値行列の和に分解できることが知られており、半正定値計画問題の計算効率化に利用されている。本研究では、この分解定理に対して線形代数を用いた直接的な証明を与えた。

③ 線形相補性問題と呼ばれる数理計画問題に対して、係数行列の疎性という組合せ的性質に着目し、その計算複雑度を明らかにした。

(2) グラフにおいてサイクルを互いに交わらないように詰め込む問題を扱った。この問題はグラフ理論における基本的な問題であり、グラフのサイクルで長さが偶数のものは線形方程式の符号可解性判定など組合せ的行列理論とも関連が深い。

サイクル詰め込み問題は Erdős-Pósa 性と呼ばれる良い構造を持つことが知られている。本研究では、サイクル詰め込み問題を一般化し、指定された頂点集合を通るサイクルのみを詰め込む問題に対して、Erdős-Pósa 性を示した。さらに、この結果を一般化し、長さが偶数・奇数のみのサイクルなど、パリティ制約が課された場合に対しても Erdős-Pósa 性を証明した。Erdős-Pósa 性という構造を利用することで、サイクル詰め込み問題やフィードバック点集合問題に対する固定パラメータ・アルゴリズムの設計した。

(3) 組合せ最適化問題に現れる特殊な数理計画問題に対して、その整数ギャップや解の構造などを解析した。

① 基本的な組合せ最適化問題のひとつであるビンパッキング問題の一般化を行った。ビンパッキング問題は整数計画問題として定式化されるが、その整数計画が持つ組合せ的構造に着目することにより、より一般的な問題（順序交換性を持つ集合被覆問題）に拡張し、その加法的整数ギャップの上下界を解明した。

②ロバスト性とは、組合せ最適化問題の解が持つ構造的性質のひとつであり、マトロイドが持つ貪欲性の自然な拡張である。本研究では、まず、マッチングのロバスト性に対する先行研究の成果を、独立システムと呼ばれるより一般的なクラスに拡張し、近似比を改善した。また、独立システムの特例であるナップサック問題に対して、そのロバスト性を解析し、最大ロバスト比を達成する解を求める効率的なアルゴリズムを提案した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 7 件)

① Naonori Kakimura, and Ken-ichi Kawarabayashi, Packing Directed Circuits through Prescribed Vertices Bounded-Fractionally. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 26(3), pp.1121-1133, 2012. 査読有
DOI:10.1137/100786423

② Naonori Kakimura and Ken-ichi Kawarabayashi, Packing Cycles through Prescribed Vertices under Modularity Constraints. *Advances in Applied Mathematics*, 49(2), pp.97-110, 2012. 査読有
DOI:10.1016/j.aam.2012.03.002

③ Naonori Kakimura, Kazuhisa Makino, and Kento Seimi, Computing Knapsack Solutions with Cardinality Robustness. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, 29(3), pp.469-483, 2012. 査読有
DOI:10.1007/s13160-012-0075-z

④ Naonori Kakimura, Ken-ichi Kawarabayashi, and Daniel Marx, Packing Cycles through Prescribed Vertices. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 101, pp.378-381, 2011. 査読有
DOI:10.1016/j.jctb.2011.03.004

⑤ 垣村尚徳, 数理計画と組合せの行列理論, オペレーションズ・リサーチ, 56, No. 1, pp. 21-26, 2011 年. 査読無

⑥ Naonori Kakimura, Matching Structure of Symmetric Bipartite Graphs and a Generalization of Polya's Problem. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 100, pp.650-670, 2010. 査読有
DOI:10.1016/j.jctb.2010.06.003

⑦ Naonori Kakimura, A Direct Proof for the Matrix Decomposition of Chordal-Structured Positive Semidefinite Matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, 433, pp.819-823, 2010. 査読有
DOI:10.1016/j.laa.2010.04.012

[学会発表] (計 13 件)

① 澄田範奈, 垣村尚徳, 牧野和久, 疎な線形相補性問題に対する組合せ的アルゴリズム, 2012 年日本オペレーションズ・リサーチ学会秋季研究発表会, ウィンクあいち, 2012 年 9 月 12 日-13 日.

② N. KAKIMURA, K. Makino, and K. Seimi, Computing Knapsack Solutions with Cardinality Robustness. The 21th International Symposium on Mathematical Programming (ISMP), Berlin, Germany, August 19-24, 2012.

③ N. Kakimura, K. Kawarabayashi, and Y. Kobayashi, Erdős-Pósa Property and Its Algorithmic Applications — Parity Constraints, Subset Feedback Set, and Subset Packing. The 23rd Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA 2012), Kyoto, Japan, January 17-19, 2012.

④ N. Kakimura, K. Makino, and K. Seimi, Computing Knapsack Solutions with Cardinality Robustness. The 22nd International Symposium on Algorithms and Computation (ISAAC 2011), Yokohama, Japan, December 5-8, 2011.

⑤ 垣村尚徳, 河原林健一, 指定された頂点を通るパリティ制約付サイクルのパッキング, 日本応用数理学会 2011 年度年会, 同志社大学, 2011 年 9 月 14 日-16 日.

⑥ N. Kakimura and K. Makino, Robust Independence Systems. The 38th International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP 2011), Zurich, Switzerland, July 4-8, 2011.

⑦ N. Kakimura and K. Makino, Robust Independence Systems. The SIAM Conference on Optimization, Darmstadt, Germany, May 16-19, 2011.

⑧ F. Eisenbrand, N. Kakimura, T. Rothvoss, and L. Sanita. Set Covering with Ordered

Replacement — Additive and Multiplicative Gaps. The 15th International Conference on Integer Programming and Combinatorial Optimization (IPCO 2011), Yorktown Heights, U.S., June 15-17, 2011.

⑨ N. Kakimura and K. Kawarabayashi, Packing Cycles of Length 0 Modulo p through Prescribed Vertices. The 7th Hungarian-Japanese Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications, Kyoto, Japan, May 31-June 3, 2011.

⑩ 垣村尚徳, 牧野和久, ロバスト独立システム, 2011年日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会, 電気通信大学, 2011年3月17日-18日.

⑪ 垣村尚徳 (with F. Eisenbrand, T. Rothvoss and L. Sanita): 順序交換性を持つ集合被覆問題, 日本応用数理学会平成22年研究部会連合発表会, 電気通信大学, 2011年3月7日-8日.

⑫ N. Kakimura, Matching Structure of Symmetric Bipartite Graphs and a Generalization of Pólya's Problem. The 20th International Symposium on Mathematical Programming (ISMP), Chicago, U.S., August 23-28, 2009.

⑬ 垣村尚徳, コーダル構造を持つ半正定値対称行列に対する極大クリーク行列分解の直接的な証明, 2009年日本オペレーションズ・リサーチ学会秋季研究発表会, 長崎大学, 2009年9月9日-10日.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

垣村尚徳 (KAKIMURA NAONORI)
東京大学・教養学部・特任講師
研究者番号: 30508180

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし