

機関番号：12101

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2009～2010

課題番号：21840014

研究課題名（和文） 天体の連続体モデルの数学解析

研究課題名（英文） Mathematical analysis of the continuum model
of astronomical objects

研究代表者

梅原 守道 (UMEHARA MORIMICHI)

茨城大学・大学教育センター・講師

研究者番号：40532164

研究成果の概要（和文）：

連続体近似（圧縮性粘性流体の基礎方程式）を用いて天体をモデル化し、それに対して数学解析を行うことでモデルの妥当性を検証した。主な成果は次の二つである。(1) 天体を構成するガスが理想気体からなるものと仮定し、かつ運動の自由さを空間1次元的に限った場合に、初期データが小さくない場合にもモデルが長時間安定して存在することを証明した。(2) 理想気体からなるガスが空間3次元球対称運動をしている場合にも、(1)と同様にモデルが長時間安定して存在することを証明した。

研究成果の概要（英文）：

We considered the mathematical modelization of astronomical objects by the continuum approximation (based on the basic equation of compressible viscous fluid), and verified the justification of our modeling through mathematical analysis. We obtained the following main two results: (1) On the case that both the model is composed of ideal gas and the gaseous motion is spacially one-dimensional, we proved that the motion of the gas exists for a long time stably without taking the smallness on the size of the initial data. (2) On the case that the gaseous motion is spherically symmetric in spacially three-dimension, we proved the long time stability of the motion of the gas as with the case (1).

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	710,000	213,000	923,000
2010年度	860,000	258,000	1,118,000
年度			
年度			
年度			
総計	1,570,000	471,000	2,041,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：圧縮性粘性流体, Navie-Stokes 方程式, 自由境界問題, 自己重力

1. 研究開始当初の背景

本研究は、天体やその周辺の天文現象を連続体近似を用いてモデル化し、モデルを数学的に解析することで現象のしくみを明らかにしようとするものである。天体、中でも恒

星は主に水素、ヘリウムなどの気体から構成されており、その運動は連続体の基礎方程式をベースとして記述される。この方程式に基づく工学的な応用研究（数値解析やシミュレーション）は多くの成功をおさめており、そ

の意味で基礎方程式の信頼性は高いと考えられる。一方、方程式の持つ強い非線形性のために、この方程式に対する一般的な数学理論を得ることは大変難しく、現状では、注目している現象（モデル）ごとに適当な理論や解析手法を開発していく必要がある。本研究で対象とする天文現象は複雑な物理過程を含んでおり、そのモデル化や解析は困難であり、これまでに十分な研究成果が上がっていない状況であった。

天体モデルの運動は、数学的には「自由境界（自由表面）を持ち、自己重力作用下にある圧縮性粘性熱伝導性流体」（これを以降「流体星」と呼ぶ。）の初期値境界値問題（自由境界問題）として定式化される。この問題は既に、十分に一般的な状況下で時間局所的には解かれていたが、その解が長時間存在するという保証は得られておらず、したがって天文現象において最も興味深い点である「解の長時間の挙動」について一般的な解答は得られていなかった。

しかしながら、関連する研究として、運動を空間1次元方向に制限したある種の連続体モデルに対しては、注目に値する時間大域的な結果が知られていた。Kazhikhov-Shelukhin は外力場なしの固定境界問題で理想気体の空間1次元運動を考察し、初期データが滑らかであればその大きさによらず、滑らかな長時間の解が一意に存在することを示した(1977)。その後、自由境界問題に対しても Nagasawa による結果(1988)などが得られている。これら以降、空間1次元運動に特化した多数の流体モデルが考察され、研究成果も数多く報告されてきた。しかし、既存の結果の大部分は問題設定（物理状況）の不適合さなどの点で天文現象へは応用できない状況であった。粗く言えば、「自由境界」かつ「自己重力（密度分布に依存し、大きさに制限の無い外力）」を課したモデルに対して「小さくない初期データ」を扱った問題が満足に解けていなかったため、たとえ運動を空間1次元的に限ったとしても既存の結果を天文現象へ応用できないという状況であった。

2. 研究の目的

報告者は、上に述べた状況を踏まえて、天体やその周辺の現象を扱えるような連続体モデルを提案し、その解析のための数学理論を開発、整備することを目指した。

本研究の主たる目的は、いくつかの天体モデルに着目し、モデルの長時間挙動や長時間の安定性等を保証できるかどうかを数学解析を通して検証することである。本研究では主として、流体星の空間1次元運動または球対称な空間3次元運動に焦点をあてた。運動の自由度（空間変数の数）を制限することで

運動の一般性は損なわれるが、数学的な困難さを緩和するという大きなメリットがある。また、天文特有の現象は、ある程度は空間次元に依らず現われると予想できる。

3. 研究の方法

研究の基本的な方法は、報告者自身の試行錯誤的な考察（関連する文献の精読、および独自の計算）と、それを基にした他研究者との質疑や討論である。本研究では特に、谷温之氏（現・慶應義塾大学教授）を研究協力者として位置づけており、氏とは定期的な討論を行った（共著で論文を作成している）。

数学的には、本研究では次のような解析手法（解の構成手法）をとった。本研究独自の工夫や考察は主に下記(3)(4)(5)の工程で行われた。

- (1) オイラー座標系において自由境界問題として定式化されたオリジナルの問題を、ラグランジュ変換により固定境界上の問題へと変換する。
- (2) 問題の、一意な時間局所解を構成する。解空間としてはヘルダー空間（滑らかな関数の空間）を考える。
- (3) 問題の、ラグランジュ座標系における定常解の一意存在を調べる。
- (4) 問題の、長時間にわたる解を構成するために、時間局所解を延長する。そのために必要な、解のアプリオリ評価を導出する。アプリオリ評価は、解のソボレフ空間におけるノルム評価からはじめて、それを Kazhikhov-Shelukhin 流の手法を用いてヘルダー空間における評価へと発展させる。
- (5) (4)で得られた時間に依存しないアプリオリ評価を用いて、解の時間漸近挙動を調べる。物理的考察により、解は(3)で得られた定常解へと収束することが期待される。併せて、解の収束のオーダーを調べる。

4. 研究成果

本研究の主要な成果は次の二つである。

- (1) 天体を構成するガスが理想気体である場合を考え、その空間1次元運動を詳しく調べた。大きさに制限のない滑らかな初期データ（ヘルダー空間に属する初期関数）から、滑らかな一意の解が任意の時間まで構成できることを示し、さらに、ある条件の下ではその解が時間無限大でも爆発せず、ある定常的な状態へ収束することを示した。その定常的な状態とは、与えられた初期データによって完全に（一意に）定まるものであり、問題

の定常解でもある。

こういった、解の長時間挙動を得るには、解の時間一様なアприオリ評価を導出する必要があるが、本研究のように系が自己重力作用下にある場合に（小さくない外力が作用している場合に）、解の時間一様な評価を得ることが困難であることはよく知られていた。既存の研究の多くでは、初期データにある種の小ささを仮定することでこういった困難が回避されてきたが、天文現象においては初期データの小ささ（初期状態の平坦さ）は物理的に見て必ずしも期待できない。本研究では、初期データが任意に大きい場合にも、ある条件（流体星の置かれる物理的環境を制限する条件）の下では時間一様なアприオリ評価が可能であることが示された。

報告者による前身研究では、やや強い条件下で一様評価が達成されていたが、本研究の期間中にこれを改良し、物理的によりリーズナブルな条件下で時間一様なアприオリ評価を導出し直すことに成功した。この条件は、天体の表面にかかる外部からの圧力（これを以降「外圧」と呼ぶ。）と、天体を構成するガスの比熱との間の関係を規定（ある範囲内で許容）するものである。この条件によれば、ガスの比熱の大きさ（すなわち、ガスの種類）に応じて、天体が長時間安定して存在するための外圧の大きさが指定されることになる。現実の天体（恒星）は、連続体近似が許容される程度に巨視的に見た場合、薄い大気の層に覆われていると考えられる。

（その大気層の外側が真空である。）この大気層が内側の天体に及ぼす圧力がここでいう外圧に相当し、したがって、我々の考察するモデルでは外圧ゼロのケースが必ずしも現象的にリーズナブルなわけではない。本結果はこういった事情も反映されており、物理的に非常に興味深い結果と考えている。この結果は既にフルペーパー論文としてまとめており、現在は査読付きの学術雑誌に投稿中である。

(2) ガスが理想気体である場合の空間3次元球対称運動（中心に剛体の球核を設定し、そのまわりに分布する気体の球対称な運動）を考察し、解の長時間にわたる一意存在可能性および解の長時間挙動を調べた。結果として、ある一定の条件のもとでは滑らかな初期データから一意の解を長時間にわたり構築することができて、かつ、その解は時間無限大で系の定常解へ収束することが示された。ここでいう条件とは、「初期データの大きさ」、「ガスの比熱の大きさ」、「外圧の大きさ」の3つのバランスを規定する（ある範囲内で許容する）ような条件である。本結果は(1)と対をなす成果であり、(1)の結果をより3次元要素が強いモデルへと拡張したもの

と言える。(1)と(2)では空間変数の数は同じであるが、モデルの持つ3次元的な要素が影響して解析手法に強く表れており、報告者は、本結果を国際研究集会（於ギリシア）で発表し、その要旨は速報論文として出版された。現在このフルペーパー論文を執筆中であり、査読付き学術雑誌への投稿を計画している。

以上二つの研究成果により、圧縮性粘性流体の流体星モデルとして、かねてより典型的であった二つのケースの数理的妥当性が、ひとまず物理的に満足される形で示されたと言える。しかし、上のいずれのケースでも理想気体の場合のみを扱っており、天体の構成要素としてより一般的な状態方程式に従うガスを考察することは、今後の重要な課題である。もちろん、最終的にはガスの運動の自由さを空間次的に制限せずに同類の結果を得ることを目指さねばならないことは言うまでもない。また、数学解析的な手法の発展という観点からの本研究の最大の成果は、自己重力に代表されるような大きさに制限のない外力を扱う際の解析手法（解のノルムを評価する手順）が開発できたことである。この手法は、天体モデルに限らず、多様な数理モデルへの応用が可能と考えられる。

5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計2件）

[1] M. Umehara, Temporally global behaviour of the spherically symmetric flow of a viscous and self-gravitating gas, In: International conference on numerical analysis and applied mathematics 2010, edited by T. E. Simos, G. Psihoyios and Ch. Tsitouras, 924-927, AIP Conf. Proc., **1281**, Amer. Inst. Phys., 2010. (査読有り)

[2] M. Umehara, On the free-boundary problem for self-gravitating viscous gaseous models, In: Seminar on mathematical sciences 12, edited by H. Soga (Chief), 94-108, Ibaraki Univ., 2009. (査読無し)

〔学会発表〕（計2件）

[1] 梅原守道, Global behaviour of the spherically symmetric flow of a self-gravitating viscous gas over the rigid core, 日本数学会（函数方程式論分科会）、早稲田大学、March 20-23, 2011（震災により会合中止、講演は成立）。

[2] M. Umehara, Temporally global behaviour of the spherically symmetric flow of a viscous and self-gravitating gas, International conference on

numerical analysis and applied mathematics 2010,
HOTEL RODOS PALACE, Rhodes, Greece,
September 19-25, 2010.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

梅原 守道 (UMEHARA MORIMICHI)
茨城大学・大学教育センター・講師
研究者番号：40532164