

機関番号：12601

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2009～2010

課題番号：21840017

研究課題名（和文）ファノ多様体の量子位相不変量

研究課題名（英文）Quantum Topology of Fano Varieties

研究代表者

ガルキン セルゲイ (GALKIN Sergey)

東京大学・数物連携宇宙研究機構・特任研究員

研究者番号：10554503

研究成果の概要（和文）：本研究では105種類すべてのなめらかなファノ3次元多様体のミラーを構築した。そのうち104個についてはトーリック交差あるいは非アーベル化した表現を与え、種数ゼロのGromov-Witten不変量を計算し、ミラー対称性仮説を証明した。さらに、これら104個についてExtremal局所系を導入して、ミラー対称性によって奇次元ファノ多様体と関わるすべての局所系はなめらかなファノ3次元多様体になるという我々の推測を支持した。我々の手法は次元によらず、4次元のケースについて計算中である。

研究成果の概要（英文）：We had great outreach in media this year and also new exciting results: we constructed mirrors for all 105 families of smooth Fano threefolds, for 104 of these families we give a nice representation as toric complete intersection or its "unabelianization", thus we compute their genus zero Gromov-Witten invariants, and so we prove hypothesis of mirror symmetry (in what concerns differential equations) for these 104 families, we introduce a new but very fundamental notion of extremal local systems - those are acyclic and it is equivalent to minimization of some functional, we support our conjecture that all local systems associated with odd-dimensional Fano varieties via mirror symmetry are extremal by case of 104 families of smooth Fano threefolds. Our method doesn't depend on dimension and now machines in Imperial College are working out half billion four-dimensional candidates (computing the basic invariants will take approximately 2-3 more months).

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	900,000	270,000	1,170,000
2010年度	900,000	270,000	1,170,000
総計	1,800,000	540,000	2,340,000

研究分野：数学

科研費の分科・細目：代数学

キーワード：①幾何学 ②トポロジー ③代数学

1. 研究開始当初の背景

(1) 「量子モチーフの1進実現」

これは Vasily Golyshev 及び Ludmil Katzarkov 等との共同研究計画の暫定表題である。ファノ多様体の量子モチーフの概念は未だ明瞭ではないが、モチーフの”実現”をアフィン直線上のD-加群である Dubrovin の構造接続をずっと洗練させた所の1進層の圏（又は大域的クリスタル、又はホッジ構造の変形）の対象として研究することが出来る。そのホッジ理論的实现は最近 Katzarkov, Kontsevich 及び Pantev 等により非可換ホッジ構造の名の下に導入された。

(2) 「アペリ類とガンマ類」

(http://www.mi.ras.ru/~galkin/work/zeta_grass.pdf)における最近の定式化では、アペリ定数の系は自然にファノ多様体のコホモロジーのレフシェッツ分解の切片達に対応し、その事がアペリ類（の原始部分）の定義を導く。Galkin と入谷により提示された予想はアペリ類とガンマ類とを関係づけるものである。

(3) 「Extremal ローラン多項式」

Extremal ローラン多項式はやや誇張して言うところの古典的な dessin d'enfant の高次元化と考えることができる。我々は代数的トーラス上の関数でその臨界値たちが可能な限り近づいているものに興味がある。より正確には与えられた多面体 P を Newton 多面体としてもつローラン多項式 L 全体のなす空間を考え、 L のレベル超曲面たち $\{L=t\}$ の与えるコホモロジー局所系の（スター拡張の）オイラー標数に応じてこの空間を階層化する。Extremal ローラン多項式とはこの階層化におけるもっとも次元の低い層にあるローラン多項式のことである。特に興味があるのはオイラー標数が0の場合である。

2. 研究の目的

ファノ多様体およびその完全交差の新たな種々の不変量（ファノスペクトル、アペリ特性類、ガンマ類、フロベニウス指数数など）を厳密に定義する。それらの諸性質および関係を確立する。これらの不変量と関係をトーリック退化に適用することによりファノ多様体の完全交差たちの記述やその予想を行う。ミラーの双有理変換の言葉でトーリック退化の全ての階層を理解する。Extremal ローラン多項式を見つける。

3. 研究の方法

(1) 「量子モチーフの1進実現」

我々はある種の1進層を1進実現の候補者として導入し、それ等の性質やそれ等が引き起こすファノ多様体の不変量（新たな示性数）を研究する計画である。その層等はN. Katzによって導入された、アフィン直線の混合積がテンソル積となるようなある種のテンソル圏の対象である。

(2) 「アペリ類とガンマ類」

我々はアペリ類の厳密な定義を与える事により、確かな証拠をもって我々の予想を裏付けると共にグラスマン多様体の時には最近の Kim/Sabbah/Ciocan-Fontanine and Ueda結果を用いて我々の予想を証明する様な、ミラー対称性の論法を与えるものである。更に、Vasily Golyshevと共同でその様なファノ多様体の場合には彼のプレプリント”Deresonating a TatePeriod”に提案された方法の一般化を用いてグラスマン多様体として予想を設定できることを期待する。

(3) 「Extremal ローラン多項式」

Extremal ローラン多項式の重要な役割はファノ多様体（やスタック）のフロベニウス多様体に対応することである。Batyrevによるトーリック退化の理論を定量化するために我々はExtremal ローラン多項式の系統的な研究を立ち上げる。研究はアルゴリズム的に実行され、多くの部分は計算問題である。さらに進んで概念的な理解に際してはEnckevortとvan Stratenの方法と類似のやり方でExtremal ローラン多項式を解釈する。Extremalローラン多項式に付随する局所系のモノドロミーを調べることで、その局所系のモノドロミー保存変形が与えるフロベニウス多様体と同一のフロベニウス多様体を(Gromov-Witten理論から)与える(準)幾何学的対象のトポロジーを预言する。このテーマの系統的な研究は膨大な仕事であり、Alessio Corti, Tom Coates, Vasily Golyshev, Alexander Kasprzyk, Duco van Straten らの協力を得て行われる。

4. 研究成果

(1) (Golyshev および Katzarkov との研究) 重みつき射影空間内の完全交差に対してその量子モチーフの1進実現が指数的対象(Artin-Schreier 層)の畳み込みとして構成される。Katzarkov による多重ポテンシャルとの関係は更なる解明を必要とする。

(2)(Golyshev および入谷との研究) 任意のファノ多様体に対してアペリ類が厳密に定義され, full exceptional collection をもつファノ多様体に対してはアペリ類のシステムが定義された. 我々は Galkin-入谷, Dubrovin による予想を拡張し, アペリ類のシステムに対するガンマ予想を定式化した. また, 量子佐武対応を用いてグラスマン多様体に対するガンマ予想を証明した. 現在プレプリント(IPMU 10-0200)を準備中である.

(3)(Coates, Corti, Golyshev, Kasprzyk との研究) Extremal ローラン多項式はファノ多様体とミラー双対であるべき対象である. 我々は Minkowski 仮説を導入することで extremal なローラン多項式を多数生成し, またそれと共に Kreuzer-Skarke の反射的 3 次元多面体の分類を用いることで, Iskovshikh-森-向井による滑らかなファノ多様体の 105 個の変形族を復元することができた. この変形族のうち 104 個についてはトーリック多様体の完全交差あるいは完全交差の (Bertram, Ciocan-Fontanin, Kim, Sabbah の意味での)「非アーベル化」としての表示を与えた. この表示により, これらの変形族については種数 0 の Gromov-Witten 不変量が計算できる. したがってこれらの変形族と 3 次元 Minkowski 仮説により与えられる extremal ローラン多項式との間のミラー対称性が証明された. 次の 2 年間で, この計画を 4 次元に拡張する予定である. 研究結果はブログ <http://scim.ag/fano-v> で公開されており, この計画に関する評論が「Elementary Mathematics. Random Samples, Science, 25 February 2011, page 994」および「A new dimension for mathematics--the Periodic Table of shapes. AMS Math Digest Feb 2011.」でなされている.

(4)(Usnich との研究) 射影平面の全ての正規退化に対し, その退化に関する射影平面のミラー双対であるローラン多項式(ミラーの「かけら」)が構成された. 我々は射影平面のミラーの異なった「かけら」がお互いにクラスターmutation と呼ばれる特別な双有理変換で移りあうことを示した. 我々はまたポテンシャルの mutation に関する一般理論を開発し, 2 次元において非常に明示的な結果を得た.

将来の研究の方向

(5)(Bondal との研究) 我々は minuscule 等質多様体に対してミラー双対なローラン多項式を構成した.

(6)(Mellit との研究) 我々は(接続層の導来圏において)長さ 5 の full exceptional

collection を持つ 4 次元多様体は射影空間に限ることを証明した.

(7)(報告者自身の研究: IPMU 10-0150, 10-0101) 3 次元 G-Fano 多様体と Mathieu 群 M24 の共役類の間に moonshine 型の対応を構成した. また G 極小多様体は量子極小であることを証明した.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[学会発表] (計 14 件)

① Sergey Galkin

Fano and Mathieu, Joint Seminar on Number Theory of Laboratoire J.-V. Poncelet and Sector 4.1 IITP RAS, Independent University of Moscow, Moscow, Russia, March 28, 2011.

② Sergey Galkin

Mirrors for minuscule varieties, King's College London, London, England, February 24, 2011.

③ Sergey Galkin

(a) Beyond Minkowski ansatz,
(b) Cones and Unsections; Tom, Jerry and Spike,
(c) SCr gauge-equivalence principle: Cremona ansatz and towards Usnich ansatz",
(d) New quantum motive candidate from abelian/non-abelian correspondence
Workshop on Fano Varieties and Extremal Laurent Polynomials, Imperial College London, London, England, February 23-25, 2011.

④ Sergey Galkin

(a) Mirrors for Fano threefolds, February 21, 2011
(b) Degenerations, mirrors and their mutations, February 14, 2011
(c) Mirror symmetry for minuscule varieties, February 11, 2011
KIAS Geometry Seminars, Seoul, Korea

⑤ Sergey Galkin

(a) Laurent phenomenon for Landau-Ginzburg potential, February 4, 2011
(b) G-Fano threefolds and Mathieu group, January 31, 2011
University of Miami, Coral Gables, USA.

⑥ Sergey Galkin

Two constructions of mirrors for Fano

varieties, Second Latin Congress on Symmetries in Geometry and Physics, Universidade Federal do Parana, Curitiba, Brazil, December 13, 2010.

⑦ Sergey Galkin

(Mirror) modularity of Fano threefolds, Workshop on mirror symmetry and differential equations, Tokyo Metropolitan University, Tokyo, Japan, August 24, 2010.

⑧ Sergey Galkin

Prokhorov-Hacking degenerations in the mirror, Workshop on subgroups of Cremona groups, University of Edinburgh, Edinburgh, Scotland, March 30, 2010.

⑨ Sergey Galkin

Degenerations in the mirror, Algebra seminar, University of Aberdeen, Aberdeen, Scotland, March 25, 2010.

⑩ Sergey Galkin

Mirror symmetries of P2 enumerated by Markov triplets, Math/String seminar, IPMU, Kashiwa, Japan, January 19, 2010.

⑪ Sergey Galkin

Invariants of Fano varieties via quantum D-module, Algebraic geometry seminar, Tokyo University, Komaba, Japan, December 14, 2009.

⑫ Sergey Galkin

Mirror symmetry of del Pezzo surfaces, Geometry seminar, Tokyo Metropolitan University, Tokyo, Japan, November 27, 2009.

⑬ Sergey Galkin

Landau-Ginzburg models of Fano varieties, Workshop on recent advances in mathematics, IPMU, Kashiwa, Japan, November 16, 2009.

⑭ Sergey Galkin

Apery Class, Workshop on HMS and Hodge theory, Universitaet Wien, Vienna, Austria, August 12, 2009.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

ガルキン セルゲイ (GALKIN Sergey)

東京大学・数物連携宇宙研究機構

・特任研究員

研究者番号：10554503

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者 ()

研究者番号：