

機関番号：14301  
 研究種目：研究活動スタート支援  
 研究期間：2009～2010  
 課題番号：21840030  
 研究課題名（和文）道来圏の研究

研究課題名（英文） Study on derived categories

## 研究代表者

岡田 崇 (OKADA SO)  
 京都大学・数理解析研究所・特定研究員（グローバルCOE）  
 研究者番号：50547015

## 研究成果の概要（和文）：

導来圏を安定性条件を使い研究した。Fermat 多項式ホモロジカルミラー対称性に注目した。この対称性は超弦理論の研究から、Kontsevich が提唱した接続層の導来圏とラグランジアン導来圏の同値関係で、本研究では同変接続層の導来圏と深谷-Seidel 圏の同値関係を示し、さらに圏論的 Pontryagin 双対を議論した。深谷-Seidel 圏を箆で記述し安定性条件を議論し、剛的半安定対象の数え上げから保型性を研究した。

## 研究成果の概要（英文）：

We study derived categories, using stability conditions. In particular, we deal with homological mirror symmetry for Fermat polynomials. From studies on string theory, Kontsevich proposes the symmetry as equivalence of derived categories of coherent sheaves and Lagrangians. We give equivalence of derived categories of equivariant coherent sheaves and Fukaya-Seidel categories, and discuss categorical Pontryagin dualities. We give quiver descriptions of Fukaya-Seidel categories and discuss stability conditions. We study modularity, counting rigid semistable objects.

## 交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009 年度	890,000	267,000	1,157,000
2010 年度	820,000	246,000	1,066,000
年度			
年度			
年度			
総計	1,710,000	513,000	2,223,000

研究分野：幾何学と導来圏

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：ホモロジカルミラー対称性、導来圏、安定性条件、保型形式

## 1. 研究開始当初の背景

導来圏は Verdier や Grothendieck により、Serre 双対の一般化を行うための代数幾何的

な枠組みとして導入され、先駆的な研究がなされた。

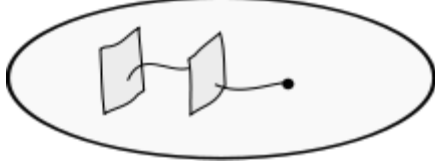
これまで導来圏は代数幾何の枠組みに留ま

らず表現論、代数トポロジー、微分幾何、圏論、理論物理などの幅広く様々な分野で活発に研究されている。

## 2. 研究の目的

近年になり、トポロジカルな超弦理論における A モデルと B モデルと呼ばれる二つの理論の対称性をを用いた研究から、Kontsevich がホモロジカルミラー対称性を導来圏の枠組みで提唱した。

以下は、例えば B モデルにおいて空間  $X$  に存在する「超弦」が膜や点に繋がっている図である。大まかに言えば、超弦に対応する写で、



膜や点に対応する層が導来圏の鎖を成している図である。

さらに、理論物理学者の Douglas による超弦理論における  $\pi$  安定性の概念に触発され、Bridgeland が導来圏に対する安定性条件の概念を創始した。

安定性条件の概念は、数学的に言えば Mumford のベクトル束に対する幾何的不変式論の研究に則っている。特に King による叢の表現論に対する研究を導来圏で再現できる。

以上の研究におけるモジュライ空間は普遍量の計算を通して、保型性との関連で活発に研究されてきた。

さらに、Ramanujan の研究からはじまり保型形式の概念の拡張である偽保型形式 (mock modular form) の概念が Zweger 等による研究から次第に明らかになってきた。よって、安定性条件やそれに触発されて起こった壁越え現象の研究を使い、保型性に対する新たな研究も期待できる。

本研究は、導来圏に対するホモロジカルミラー対称性や安定性条件、また普遍量の数え上げと保型性の研究を目的とする。

## 3. 研究の方法

Fermat 多項式から決まる Calabi-Yau 多様体の接続層の導来圏は、ホモロジカルミラー対称性の重要な研究対象である。

$n$  次 Fermat 多項式を  $X_n$  とおく。たとえば 3 次であれば  $X^3+Y^3+Z^3$  である。 $X_n$  に作用する位数  $n^2$  次のアーベル群を  $G_n$  と書く。

Fermat 多項式から決まる Calabi-Yau 多様体の接続層の導来圏を、Fermat 多項式  $X_n$  に作用する上記の有限群  $G_n$  による Calabi-Yau 多様体上の同変接続層の導来圏と、Fermat 多項式を Landau-Ginzburg モデルと見た場合に得られる深谷-Seidel 圏を使い研究する。

導来圏の研究には、Keller や Toen 等により研究されている Differential Graded (DG) 圏の理論を用いる。

上記の同変接続層の導来圏と深谷-Seidel 圏の研究には、 $X_n$  の各和成分に関して A' Campo のモシフィケーションを使う。

高橋篤史-斉藤恭司-梶浦宏成と Orlov の Matrix factorization の導来圏に関する結果を用いる。 $A_n$  叢の有限生成加群圏の導来圏である  $D(\text{mod-}A_n)$  と、DG 圏の枠組みにおけるテンソル積の対象であるコンパクト生成元の研究をする。

Auroux-Katzarkov-Orlov の研究を用いる。特に、深谷-Seidel 圏に関する Sebastiani-Thom 型の DG 圏のテンソル積に関する予想と関連研究を参考にする。

同変をとらない Calabi-Yau 多様体の導来圏の研究には、Keller による DG 軌道圏の研究を深谷-Seidel 圏に対して用いる。

Fermat 多項式に対する安定性条件の研究を行うため叢の表現で深谷-Seidel 圏を記述する。

特に、叢の頂点をラグランジアン、各辺をラグランジアンの交叉と対応させる。深谷-Seidel 圏の構成に必要なラグランジアンの向き付けの任意性と導来圏に作用する自己同値関手を組み合わせる議論し、安定性条件の壁越え現象として研究する。

この場合の自己同値関手は Seidel-Thomas による球的関手に対する研究や、理論物理における Gepner モデルや極大体積極限 (large volume limit) という概念に関係する。

さらに、以前の Mellit-岡田や Kontsevich-Soibelman による壁越え公式と、その量子化の研究を用いて剛的半安定対象の数え上げと偽保型型式の関係を調べる。

必要に応じて、中島教授、深谷教授、

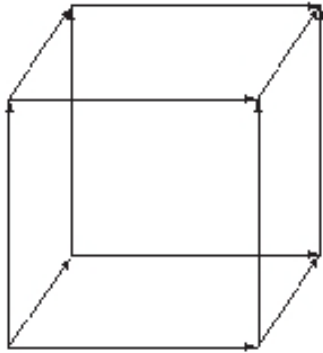
Kontsevich 教授、Zagier 教授等と議論を行う。また、国内外の研究者を招聘し議論を行い関連する結果を研究する。

#### 4. 研究成果

本研究では Fermat 多項式から決まる Calabi-Yau 多様体の導来圏を、同変連接層の導来圏、深谷-Seidel 圏、Keller による DG 軌道圏、さらには安定性条件等の概念を使い研究した。

特に、Fermat 多項式  $X_n$  の有限群  $G_n$  による同変導来圏と  $X_n$  の深谷-Seidel 圏の同値関係を DG 圏の枠組みで示した。また議論の途中では、必要に応じてこれらの導来圏の剛性を明らかにした。Happel の  $A_n$  圏の表現の圏に関する結果を使った。

さらに、上記の導来圏の圏を用いた記述を与えた。 $A_n$  圏のテンソル積であり可換な関係式を持つ。各頂点がラグランジアンに対応し、各辺が交叉に対応する。圏の例として、以下の図が 3 次の Fermat 多項式の場合に得られる。



さらに、上記の導来圏のコンパクト生成元とその DG 圏を取り、DG 軌道圏の理論、特に圏論的 Pontryagin 双対の議論を行った。

上記の圏の記述を通して安定性条件と壁越え現象の議論を、導来圏の自己同値関手と関連付けて議論した。

また、剛的半安定対象の数え上げにより母関数を構成し金子-Zagier の意味での擬保型形式(quasi modular form)を得た。特に、これらは偽保型形式からなる。

以上は、主に arXiv:0910.2014 のプレプリント “Homological mirror symmetry of Fermat polynomials” に書き下した記述に基づく。

以上の研究を進めるために、本研究期間中にはフランス高等科学研究所に訪問滞在した。滞在中に、Maxim Kontsevich 教授(フランス高等科学研究所)や Don Zagier 教授(College de France、フランス/Max-Planck-Institut für Mathematik、ドイツ)や Bernhard Keller 教授(Jussieu、フランス)等と議論を行った。

また、数理解析研究所に Thorsten Weist 博士(University of Wuppertal、ドイツ)、Jacopo Stoppa 博士(University of Cambridge、イギリス)、Alexandr Usnich 博士(University of Zurich)、大川領博士(東京工業大学)、Jan Manschot 博士(フランス原子力庁 Saclay 研究所)、Zheng Hua 博士(University of British Columbia、カナダ)、Marcelo Bernardara 博士(University of Duisburg-Essen、ドイツ)を招聘し議論を行った。

さらに、広く議論を招くために彼らの数理解析研究所、京都大学理学部数学教室、基礎物理学研究所における講演の手配を行った。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 1 件)

- ① Anton Mellit、岡田 崇、Joyce invariants for K3 surfaces and mock theta functions, Commun. Number Theory Phys. (2009) Vol 3 Num 4 p.655-676. (査読有)

[学会発表] (計 8 件)

- ① S. Okada, “Rigid semistable objects and kinds of modular forms”, School and Conference on Modular Forms and Mock Modular Forms and their Applications in Arithmetic, Geometry and Physics, the Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, イタリア(トリエステ)、3月15日、2011年.
- ② S. Okada, “Homological mirror symmetry of Fermat polynomials”, XIV International Conference on Representations of Algebras, 国立オリンピック記念青少年総合センター(代々木), 8月15日 2010年.
- ③ S. Okada, “Homological Mirror symmetry of Fermat polynomials and related topics”, Workshop on Period

Integrals and Motives, 東京大学, 2月  
17日 2010年.

- ④ 岡田 崇, “Homological mirror  
symmetry of Fermat polynomials and some  
related topics”, 微分トポロジーセミ  
ナー, 京都大学, 1月26日 2010年.
- ⑤ 岡田 崇, “Homological mirror symmetry  
of Fermat polynomials and some related  
topics”, 代数幾何セミナー, 京都大学,  
1月15日 2010年.
- ⑥ 岡田 崇, “K3曲面のジョイス不変量と  
モックテータ関数”, 近畿大学数学講演  
会, 近畿大学, 10月22日 2009年

[その他]

ホームページ等

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~okada/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

岡田 崇 (OKADA SO)

京都大学・数理解析研究所・特定研究員 (グ  
ローバルCOE)

研究者番号: 50547015