

科学研究費助成事業（基盤研究（S））公表用資料
〔令和5（2023）年度 中間評価用〕

令和5年3月31日現在

研究期間：2021～2025
課題番号：21H04994
研究課題名：周期の理論と双有理幾何学の融合、ミラー対称性数学の深化と探索
研究代表者氏名（ローマ字）：高橋 篤史（TAKAHASHI Atsushi）
所属研究機関・部局・職：大阪大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：50314290

研究の概要：

原始形式・平坦構造（Frobenius 構造）をはじめとする周期の幾何学的理論と Hodge 構造・圏論的手法を土台とした双有理幾何学の融合によって、ミラー対称性現象の一層深い理解と古典的重要問題に対する大きな貢献をもたらす、新たな数学を拓いてゆく。とくに、これらの理論における既存の成果・手法を飛躍的に発展させることを目的とする。

研究分野：数物系科学、数学、幾何学

キーワード：複素幾何学、双有理幾何学、ミラー対称性

1. 研究開始当初の背景

Gromov-Witten 理論に対する周期の理論と複素構造の変形理論に対する周期の理論の同型が、古典的なミラー対称性である。多くの研究者によって様々な方法で研究され多数の成果が得られているが、その完全な理解には未だ至っていない。一方、代数的に構成される圏と幾何学的に構成される圏の圏同値が、ホモロジー的ミラー対称性である。こちらも近年多くの研究者によって様々な重要な成果が得られているが、それが成立する範疇や古典的なミラー対称性との関係性をはじめ、解明すべき課題が多く残されている。

近年、周期の理論に関しては完全 WKB 解析や位相的漸化式、圏論的双有理幾何学に関しては（非可換）Hodge 理論や圏論的力学系、といった新たな研究手法によって活発に研究が行われている。これらはリーマン面上の2次微分を經由して Bridgeland 安定性条件の空間の研究で直接的に関わるなど、周期の理論と圏論的手法を合わせて双有理幾何学を研究することの重要性がより一層強まっている。そこでは、弦理論的着想と圏論的手法に基づく双有理幾何学の特異点理論への応用と、特異点理論における諸結果の圏論的双有理幾何学への応用が、大いに期待されるようになってきた。

2. 研究の目的

本研究の目的は、原始形式・平坦構造（Frobenius 構造）をはじめとする周期の幾何学的理論と Hodge 構造・圏論的手法を土台とした双有理幾何学の融合により、ミラー対称性現象の一層深い理解と古典的重要問題に対する大きな貢献をもたらす、新たな数学を拓くことである。とくに、

1. 三角圏・導来圏はどの程度の幾何学的情報を持っているのか？
2. 代数多様体・導来圏を分類することは可能か？
3. 平坦構造（Frobenius 構造）を支配する幾何学的構造・可積分系の構造は何か？

という問いに対する以下の3課題について、既存の成果・手法を飛躍的に発展させることを目的とする。

1. 周期の理論の着想に基づく、Bridgeland 安定性条件・圏論的エントロピーの研究推進。
2. Hodge 構造・圏論的手法による、双有理幾何学とくに極小モデル理論研究の推進。
3. Gromov-Witten 理論・Weyl 群不変式論・変形理論を関連付ける、周期写像の理解。

（以下では、それぞれ研究目的1、研究目的2、研究目的3、と記す）

3. 研究の方法

代表者・分担者・特任教員・協力者からなる研究体制で、研究目的1・2・3における諸問題の解決に向けた個別・共同研究を行う。とくに、新たな着想・手法の開発を目指しつつ、既存の成果・手法の拡張から着実に取り組む。具体的研究内容は以下のものを含む；

- 既存の成果・手法の飛躍的発展を目指すもの：Bridgeland 安定性条件の空間上の大域的な平坦構造構成。圏論的力学系に付随するゼータ函数の研究。極小モデル理論における重要問題の解決。非可換代数多様体の分類と変形理論の構築。Gamma 予想の拡張とその解決。A 周期的非可換 Hodge 構造の圏論的構成。Weyl 群不変式論の拡張と平坦構造の導出。量子原始形式の理論構築に向けた、完全 WKB 解析による基礎研究。
- 新たに取り組む研究テーマ（22年度以降）：正則変形空間の $K(\pi,1)$ 性予想解決、とくに平坦構造の存在との関連明確化。ミラー対称性と Bridgeland 安定性条件の位相的データ解析への応用。

また、国際研究集会「Mirror Symmetry and Related Topics」および「Categorical and analytic invariants in algebraic geometry」、大阪大学・京都大学におけるセミナー・勉強会の継続的開催により、研究交流・成果発信を積極的に行い、同時に、外部の知見を取り入れ新たな着想の萌芽を育み結実させる。

4. これまでの成果

代表者・分担者の研究はいずれも順調であり、得られた成果ですでに出版論文・プレプリントとして公開されているものが多数ある。また、国際研究集会における招待講演も多いなど、本研究は非常に興味を持たれ、高く評価されている。とくに重要な成果のうち2つの最重点研究について以下に記述する。

- 代表者は協力者大谷氏と鎖型可逆多項式に付随する極大次数付き行列因子化の圏に対するガンマ整構造の研究を行い、Grothendieck 群のレベルでホモロジー的ミラー対称性およびその位相的ミラー対称性との整合性を証明し、Gepner 型の Bridgeland 安定性条件の存在に関する精密な予想を与えた(雑誌論文3、研究目的2・3に関する成果)。本結果およびその土台となる代表者と協力者荒牧氏の結果を、Polishchuk 氏と Varolgunes 氏が鎖型可逆多項式のホモロジー的ミラー対称性予想解決に発展させるなど、当該分野を主導し国際的にインパクトを与えた成果である。
- 代表者は協力者池田氏・大谷氏・白石氏と、導来圏の Bridgeland 安定性条件の空間上に Weyl 群不変式による大域的な平坦構造の構成を目標とした研究を行っている。とくに、既存の枠組み(ADE型・アフィン ADE 型・楕円 DE 型)を超えた、Kac-Moody 型のルート系や半正定値一般ルート系をもたらす導来圏の Bridgeland 安定性条件の空間の解析を行う過程で、大きな波及効果をもたらす豊富な数学的对象に遭遇し、まだその全貌はつかめない状況ながら様々な重要成果が得られた。結果の拡張と整理をしつつ論文執筆中で、一部は講演を通じて発表した(雑誌論文4および招待講演1、研究目的1・2・3のすべてに跨る成果)。

5. 今後の計画

2023年度以降もこれまでと同様に、研究目的1・2・3の諸課題の解決に向けて、新たな着想・手法の開発を目指しつつ、既存の成果・手法の拡張から着実に取り組む。現在の研究体制を土台に、2023年度期初より、代数幾何学・数理物理学に跨る分野を担当する特任教員と整数論・代数幾何学・数理物理学に跨る分野を担当する特任研究員を雇用し、研究のより一層の充実・加速を目指す。

2023年度5月中旬以降は新型コロナウイルス感染症の影響が少なくなることを想定し、「Mirror Symmetry and Related Topics」および「Categorical and analytic invariants in algebraic geometry」に加えて、1年度あたり2件程度の対面型国際研究集会を主催・共催する予定である。対面型とする理由は、本研究で行う研究集会は、研究成果発表と外部の知見を得る場である以上に、参加者の対面交流によって新たな着想の萌芽を促し育む場だからである。これまででもそうであったように、多数の共同研究や成果がこれらの機会で見られることを期待している。なお、「Categorical and analytic invariants in algebraic geometry」については、その内容を一部再検討し、継続性を保ちつつも新たな方向性・視点を取り入れる。

研究が順調に進捗しているため、これまでと同様に研究を継続してゆく。まずは、これまで本研究で得られた成果を論文として取りまとめ、プレプリントのものは順次出版し、国際研究集会等での招待講演・参加も通じて積極的に成果発表を行ってゆく。

6. これまでの発表論文等(受賞等も含む)

雑誌論文(計28件): 以下はとくに重要なもの。

1. Topological recursion and uncoupled BPS structures II: Voros symbols and the τ -function / [Kohei Iwaki](#), Omar Kidwai / Communications in Mathematical Physics / 査読有 / (掲載決定) / - / 2023
2. Existence of log canonical modifications and its applications / [Osamu Fujino](#), Kenta Hashizume / European Journal of Mathematics / 査読有 / 9(1) / - / 2023.2.15
3. Gamma integral structure for an invertible polynomial of chain type / Takumi Otani, [Atsushi Takahashi](#) / Advances in Mathematics / 査読有 / 409(PartB) / 108681 / 2022.11.19
4. A Frobenius manifold for 1-Kronecker quiver / Takumi Otani, Akishi Ikeda, Yuuki Shiraishi, [Atsushi Takahashi](#) / Letters in Mathematical Physics / 112(14) / - / 2022.02.14.
5. Graded matrix factorizations of size two and reduction / Wolfgang Ebeling, [Atsushi Takahashi](#) / Manuscripta Mathematica / 査読有 / 170 / 409-425 / 2022.01.29

招待講演(計60件):

1. Frobenius manifolds for generalized root systems of type D / [Atsushi Takahashi](#) / Homological Mirror Symmetry / University of Miami / 2023.01.27

受賞(計4件):

藤野修(研究分担者) 2022年度日本数学会代数学賞

安田健彦(研究分担者) 第18回(令和3年度)日本学術振興会賞

大川新之介(研究分担者) 令和4年度科学技術分野の文部科学大臣表彰若手科学者賞

岩木耕平(研究分担者) 2022年度日本数学会賞建部賢弘特別賞

7. ホームページ等

<http://www4.math.sci.osaka-u.ac.jp/~takahashi/project>