様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６年　６月１４日現在

機関番号：１２４０１
研究種目：挑戦的研究（萌芽）
研究期間：2021～2023
課題番号：２１Ｋ１８５８３
研究課題名（和文）位相幾何学における変分問題のSobolev多様体を用いた解析

研究課題名（英文）Analysis of variational problems in topological geometry using Sobolev manifolds

研究代表者
長澤　壯之（Nagasawa, Takeyuki）

埼玉大学・理工学研究科・教授

研究者番号：７０２０２２２３
交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　4,800,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では結び目や絡み目に対するメビウス・エネルギーを対象となる結び目や絡み目の位相を考慮した解析を行うことである。絡み目型を表す位相不変量の一つに絡み数はガウス写像の写像度として定義される。ガウス写像を絡み目だけでなく結び目に対しても定義を拡張し、メビウス・エネルギーとそのメビウス不変分解によって得られた分解エネルギーとガウス写像の関連を研究した。その結果、ガウス写像を間接的に用いた各エネルギーの間接表現と、ガウス写像を直接用いた第二分解エネルギーの直接表現を得た。前者からは、エネルギー分解をエネルギーに対する中線定理と解釈できる事、後者からはメビウス・エネルギーと波動写像の関係を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義
結び目や絡み目のエネルギーは、それらの標準型を与えるために考案されたものである。その中でメビウス変換により不変なエネルギーがメビウス・エネルギーである。この不変性は幾何学的には興味深いが、解析学的には最小化列のコンパクト性の喪失を意味に、解析が困難となる。そのために、エネルギー構造のより深い理解が必要となる。本研究により、位相不変量を与えるGauss写像との関連が明らかとなった。

研究成果の概要（英文）：We study the Moebius energy for knots and kinks taking the topology of knot type and link type into consideration, The linking number of a link is the mapping degree of the Gauss map. Here, generalizing the definition of the Gauss map to knots, we investigate relations the Gauss map and the Moebius energy and its decomposition. As s result, we derive the direct expression using the Gauss map of the Moebius energy and its decomposed energies, and the indirect expression of the second decomposed energy. The decomposition can be interpreted as the parallelogram low for the energy from the indirect expression, The direct expression suggests relevance of the second decomposed energy to the wave map.

研究分野：解析幾何学

キーワード：結び目のエネルギー　絡み目のエネルギー　メビウス・エネルギー　メビウス不変　ガウス写像

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１（共通）

１．研究開始当初の背景

結び目のエネルギーは、与えられた結び目型における結び目の「標準形」を与える事が目的で、O'Hara によって導入され、O'Hara エネルギーと呼ばれる。その中の一つがメビウス・エネルギーであり、メビウス変換によって値を変えないこと (以後、メビウス不変性という) がその名前の由来となっている。メビウス不変性は幾何学的には興味深い性質であるが、解析学的にはエネルギー最小化列のコンパクト性の喪失を意味し、通常の方法では最小元の存在を示すことが出来ない。結び目型が自明な場合と素の場合については、最小元の存在は知られていたが、合成結び目型については最小元の存在・非存在は知られていない。数値計算により、存在しないと予想されている (カズナー・サリバン予想) が未解明である。それは、結び目型という位相情報をエネルギー最小化問題にどのように取り込むのか (取り込めるのか) が不明であるためである。また、メビウス・エネルギーは、エネルギーを曲線の曲がり具合を測る第一エネルギーと、ねじれ具合を測る第二エネルギーに分解出来、しかも分解後のエネルギーもメビウス不変であることが知られていた。分解エネルギーのエネルギー密度は、曲線としての接ベクトルを用いて表現される。その表現は数種類が知られていたが、それと結び目型などの位相との関連が不明であった。分解前または分解後のエネルギー密度を位相情報を提供する幾何学量を用いた表現が求められていた。絡み目についてもメビウス不変なエネルギーが存在する。こちらについてはメビウス不変分解は知られていなかった。

２．研究の目的

メビウス・エネルギーの最小化問題を考察するにあたり、位相情報を取り込み解析したい。解析学に基づく方法に位相情報を取り込むには、位相不変量か積分などで表現するものと最小化問題あるいはエネルギーとの関連を調べる。2 つの結び目からなる絡み目には、絡み数と呼ばれる位相不変量が存在する。これはガウス写像の写像度であるが、積分によって表現できる。結び目を絡み目の極限と考えることで、それぞれのメビウス・エネルギーを統一的に扱う。統一する事で、次の解析手段を確立する事を目的とする。

(i) 結び目のエネルギーのメビウス不変分解を絡み目のエネルギーに拡張する。

(ii) 絡み目の分解エネルギーとガウス写像の関連を調べる。

(iii) (ii) の結果を結び目のエネルギーに還元する。

３．研究の方法

(１) エネルギーの統一化

結び目のエネルギーは二重積分であらわされるが、変数の対角部分にエネルギー密度が特異性を持つ。そこで、まず結び目を 2 成分絡み目の極限と考え、絡み目に対するメビウス・エネルギーと結び目に対するメビウス・エネルギーを統一化する。

(２) メビウス不変エネルギーの一般化

従来知られていた結び目に対するメビウス・エネルギーに分解を、統一化したエネルギーに適用し、一般化する。

(３) 分解エネルギー密度とガウス写像の関係

結び目に対する第二分解エネルギーのエネルギー密度にこの拡張されたガウス写像が現れている。この表現を精査するとともに、第一分解エネルギー密度および分解前のエネルギー密度についても類似の表現を探求する。

４．研究成果

結び目 $\boldsymbol{f}$ と 2 成分絡み目 $(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2)$ に対するメビウス・エネルギーはそれぞれ

$$\mathcal{E}_{\mathrm{kt}}(\boldsymbol{f}) = \iint_{(\mathbb{R}/L\mathbb{Z})^2} \left(\frac{1}{\|\boldsymbol{f}(s_1) - \boldsymbol{f}(s_2)\|_{\mathbb{R}^n}^2} - \frac{1}{\mathscr{D}(\boldsymbol{f}(s_1), \boldsymbol{f}(s_2))^2} \right) ds_1 ds_2,$$

$$\mathcal{E}_{\mathrm{lk}}(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2) = \iint_{(\mathbb{R}/L_1\mathbb{Z})\times(\mathbb{R}/L_2\mathbb{Z})} \frac{1}{\|\boldsymbol{f}_1(s_1) - \boldsymbol{f}_2(s_2)\|_{\mathbb{R}^n}^2} ds_1 ds_2$$

で定義される。ここで、閉曲線 $\mathrm{Im}\boldsymbol{f}$, $\mathrm{Im}\boldsymbol{f}_1$, $\mathrm{Im}\boldsymbol{f}_2$ の長さと弧長パラメータをそれぞれ L, L_1, L_2 と s, s_1, s_2 とした。

$$\mathcal{E}_0(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2) = \iint_{(\mathbb{R}/L_1\mathbb{Z})\times(\mathbb{R}/L_2\mathbb{Z})} \left(\frac{1}{\|\boldsymbol{f}_1(s_1) - \boldsymbol{f}_2(s_2)\|_{\mathbb{R}^n}^2} - \frac{\partial^2}{\partial s_1 \partial s_2} \log \|\boldsymbol{f}_1(s_1) - \boldsymbol{f}_2(s_2)\|_{\mathbb{R}^n} \right) ds_1 ds_2$$

と置くことで、

$$\mathcal{E}_0(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2) = \begin{cases} \mathcal{E}_{\mathrm{kt}}(\boldsymbol{f}_1) - 4 & (\text{結び目 } (\boldsymbol{f}_1 \equiv \boldsymbol{f}_2) \text{ の場合}), \\ \mathcal{E}_{\mathrm{lk}}(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2) & (\text{絡み目の場合}) \end{cases}$$

と統一化できる事を示した。これらに対し、メビウス不変分解

$$\mathcal{E}_0(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2) = \mathcal{E}_1(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2) + \mathcal{E}_2(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2)$$

が成り立つ事を示した。この分解は結び目のエネルギーについては知られていたものである。右辺のエネルギーは、

$$\mathcal{E}_1(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2) = \iint_{(\mathbb{R}/L_1\mathbb{Z})\times(\mathbb{R}/L_2\mathbb{Z})} \frac{\|\boldsymbol{\tau}_1 - \boldsymbol{\tau}_2\|_{\mathbb{R}^n}^2}{2\|\boldsymbol{f}_1 - \boldsymbol{f}_2\|_{\mathbb{R}^n}^2} ds_1 ds_2,$$

$$\mathcal{E}_2(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2) = \iint_{(\mathbb{R}/L_1\mathbb{Z})\times(\mathbb{R}/L_2\mathbb{Z})} \frac{2}{\|\boldsymbol{f}_1 - \boldsymbol{f}_2\|_{\mathbb{R}^n}^2} \times \left\langle \boldsymbol{\tau}(s_1) \wedge \frac{\boldsymbol{f}_1 - \boldsymbol{f}_2}{\|\boldsymbol{f}_1 - \boldsymbol{f}_2\|_{\mathbb{R}^n}}, \boldsymbol{\tau}(s_2) \wedge \frac{\boldsymbol{f}_1 - \boldsymbol{f}_2}{\|\boldsymbol{f}_1 - \boldsymbol{f}_2\|_{\mathbb{R}^n}} \right\rangle_{\bigwedge^2 \mathbb{R}^n} ds_1 ds_2$$

で与えられるもので、$\mathcal{E}_1$ が曲線の曲がり具合を測り、$\mathcal{E}_2$ がねじれ具合を測ると解釈できる。これらのエネルギーをガウス写像を用いて表す。絡み目に対するガウス写像は、第二分解エネルギーのエネルギー密度に現れる

$$\boldsymbol{g}(s_1, s_2) = \frac{\boldsymbol{f}_1(s_1) - \boldsymbol{f}_2(s_2)}{\|\boldsymbol{f}_1(s_1) - \boldsymbol{f}_2(s_2)\|_{\mathbb{R}^n}}$$

である。結び目に対しては、上の式の $\boldsymbol{f}_1$ と $\boldsymbol{f}_2$ を $\boldsymbol{f}$ に置き換えたものとして定義する。但し、分母 $\neq 0$ となる範囲が定義域となる。$\boldsymbol{\tau}_i$ を $\boldsymbol{f}_i$ の単位接ベクトルとし、

$$\boldsymbol{\tau}_1^* = \left(\frac{\partial}{\partial s_1} \|\boldsymbol{f}_1 - \boldsymbol{f}_2\| \right) \boldsymbol{g} - \|\boldsymbol{f}_1 - \boldsymbol{f}_2\| \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial s_1},$$

$$\boldsymbol{\tau}_2^* = -\left(\frac{\partial}{\partial s_2} \|\boldsymbol{f}_1 - \boldsymbol{f}_2\| \right) \boldsymbol{g} + \|\boldsymbol{f}_1 - \boldsymbol{f}_2\| \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial s_2}$$

とおくと、

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2) &= \iint_{(\mathbb{R}/L_1\mathbb{Z})\times(\mathbb{R}/L_2\mathbb{Z})} \frac{\|\boldsymbol{\tau}_1 - \boldsymbol{\tau}_2^*\|_{\mathbb{R}^n}^2}{2\|\boldsymbol{f}_1 - \boldsymbol{f}_2\|_{\mathbb{R}^n}^2}\, ds_1 ds_2 \\
&= \iint_{(\mathbb{R}/L_1\mathbb{Z})\times(\mathbb{R}/L_2\mathbb{Z})} \frac{\|\boldsymbol{\tau}_1^* - \boldsymbol{\tau}_2\|_{\mathbb{R}^n}^2}{2\|\boldsymbol{f}_1 - \boldsymbol{f}_2\|_{\mathbb{R}^n}^2}\, ds_1 ds_2, \\
\mathcal{E}_1(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2) &= \iint_{(\mathbb{R}/L_1\mathbb{Z})\times(\mathbb{R}/L_2\mathbb{Z})} \frac{\|\boldsymbol{\tau}_1 - \boldsymbol{\tau}_2\|_{\mathbb{R}^n}^2}{2\|\boldsymbol{f}_1 - \boldsymbol{f}_2\|_{\mathbb{R}^n}^2}\, ds_1 ds_2 \\
&= \iint_{(\mathbb{R}/L_1\mathbb{Z})\times(\mathbb{R}/L_2\mathbb{Z})} \frac{\|\boldsymbol{\tau}_1^* - \boldsymbol{\tau}_2^*\|_{\mathbb{R}^n}^2}{2\|\boldsymbol{f}_1 - \boldsymbol{f}_2\|_{\mathbb{R}^n}^2}\, ds_1 ds_2, \\
\mathcal{E}_2(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2) &= \iint_{(\mathbb{R}/L_1\mathbb{Z})\times(\mathbb{R}/L_2\mathbb{Z})} \frac{(\boldsymbol{\tau}_1 - \boldsymbol{\tau}_2^*)\cdot(\boldsymbol{\tau}_2 - \boldsymbol{\tau}_2^*)}{2\|\boldsymbol{f}_1 - \boldsymbol{f}_2\|_{\mathbb{R}^n}^2}\, ds_1 ds_2
\end{aligned}$$

が成り立つ。$\boldsymbol{\tau}_i^*$ はガウス写像を用いて定義されるものであるが、上の表現にはガウス写像そのものは陽には現れない。そのためこれをガウス写像を用いた**間接表現**と呼ぶ。$\mathcal{E}_2$ についてはガウス写像を直接用いて

$$\mathcal{E}_2(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2) = -2 \iint_{(\mathbb{R}/L_1\mathbb{Z})\times(\mathbb{R}/L_2\mathbb{Z})} \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial s_1} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial s_2}\, ds_1 ds_2$$

と表現される (**直接表現**) 事も示した。

間接表現により、メビウス不変分解はエネルギーに対する中線定理であると解釈できる。また、従来は分解前のエネルギーについて知られていた余弦公式に類似のものが分解エネルギーについても存在することが分かった。第二分解エネルギーの直接表現は、第二分解エネルギーがトーラスから球面への波動写像（調和写像の一種）と関連する事が導かれた。従来より第一分解エネルギーは分数冪調和写像との類似する事が分かっていたが、本研究により分解エネルギーと調和写像との一層の親和性が見えた。調和写像には位相情報を解析に取り組んだ方法がある程度確立している。本研究の今後の進むべき方向が明らかとなったと言えるだろう。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計4件（うち査読付論文　3件／うち国際共著　1件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 Blatt Simon、Ishizeki Aya、Nagasawa Takeyuki	４．巻 31
２．論文標題 A Mobius invariant discretization of O’Hara’s Mobius energy	５．発行年 2022年
３．雑誌名 Journal of Knot Theory and Its Ramifications	６．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S021821652250016X	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

１．著者名 Aya Ishizeki, Takeyuki Nagasawa	４．巻 31
２．論文標題 Upper and lower bounds and modulus of continuity of decomposed Mobius energies	５．発行年 2021年
３．雑誌名 J. Geom. Anal.	６．最初と最後の頁 5659-5686
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s12220-020-00496-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 ―

１．著者名 Aya Ishizeki, Takeyuki Nagasawa	４．巻 298
２．論文標題 Decomposition of generalized O'Hara's energies	５．発行年 2021年
３．雑誌名 Math. Z.	６．最初と最後の頁 1049-1076
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00209-020-02601-w	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 ―

１．著者名 T. Nagasawa	４．巻 -
２．論文標題 Relevances of the Mobius energy to harmonic maps	５．発行年 2024年
３．雑誌名 Surikaisekikenkyusho Kokyoroku	６．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 ―

〔学会発表〕　計13件（うち招待講演　8件／うち国際学会　3件）

１．発表者名 長澤 壯之
２．発表標題 結び目と絡み目に対するメビウス・エネルギーのメビウス不変分解について
３．学会等名 第64回早稲田双曲幾何幾何学的群論セミナー
４．発表年 2022年

１．発表者名 長澤 壯之
２．発表標題 結び目と絡み目に対するエネルギーについて：分解定理、余弦公式とメビウス不変性
３．学会等名 RIMS共同研究(公開型)「偏微分方程式の臨界現象と正則性理論及び漸近解析」（招待講演）
４．発表年 2022年

１．発表者名 長澤 壯之
２．発表標題 結び目と絡み目に対するメビウス・エネルギーと波動写像
３．学会等名 九州関数方程式セミナー
４．発表年 2022年

１．発表者名 長澤 壯之
２．発表標題 結び目と絡み目に対するメビウス・エネルギーと波動写像
３．学会等名 第37回さいたま数理解析セミナー
４．発表年 2022年

１．発表者名 A. Ishizeki, T. Nagasawa
２．発表標題 Mobius energy for knots and links, and wave maps
３．学会等名 The 13th MSJ-SI "Differential Geometry and Integrable Systems": The 5th International Workshop Geometry of Submanifolds and Integrable Systems（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2022年

１．発表者名 長澤 壯之
２．発表標題 Mobiusエネルギーの分解と波動写像
３．学会等名 日本数学会2023年度年会函数方程式分科会（招待講演）
４．発表年 2023年

１．発表者名 T. Nagasawa
２．発表標題 Decomposition of the O'Hara energy
３．学会等名 "Energies of Knots, Residues of Manifolds and Related Topics"（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2023年

１．発表者名 T. Nagasawa
２．発表標題 The Mobius energy for knots as a limit of that for links
３．学会等名 Workshop Critical Exponent and Nonlinear Partial Differential Equations（招待講演）
４．発表年 2023年

1．発表者名
Takeyuki Nagasawa

2．発表標題
The Mobius energies of knots and links: Decomposition, the cosine formula, and their Mobius invariance

3．学会等名
The 13th Nagoya Workshop on Differential Equations（招待講演）

4．発表年
2022年

1．発表者名
石関 彩、長澤 壯之

2．発表標題
結び目と絡み目Mobiusエネルギー：分解定理、余弦公式とMobius不変性

3．学会等名
日本数学会 2022年度年会 函数方程式分科会

4．発表年
2022年

1．発表者名
石関 彩、長澤 壯之

2．発表標題
絡み目のMobiusエネルギーの極限としての結び目のMobiusエネルギー

3．学会等名
日本数学会 2022年度年会 函数方程式分科会

4．発表年
2022年

1．発表者名
T. Nagasawa

2．発表標題
The relevance of the Mobius energy to harmonic maps

3．学会等名
RIMS共同研究(公開型)「発展方程式とその周辺 -エネルギー構造と解の定量的解析-」（招待講演）

4．発表年
2023年

1．発表者名 T. Nagasawa
2．発表標題 A new formulation of the variational problem of the Mobius energy
3．学会等名 International Workshop - Regularity and Singularity for Geometric PDE and related Topics（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2024年

〔図書〕　計1件

1．著者名 長澤 壯之	**4．発行年** 2022年
2．出版社 大学院レクチャーノートシリーズ	**5．総ページ数** 63
3．書名 結び目のエネルギー：入門と最近の話題	

〔産業財産権〕

〔その他〕

長澤 壯之　科研費による研究成果 http://www.saitama-u.ac.jp/sci/math/lab/nagasawa/seika.html 埼玉大学研究者総覧　長澤 壯之 http://s-read.saitama-u.ac.jp/researchers/pages/researcher/TeBukxhV

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
研究分担者	下川　航也 (Shimikawa Koya) (60312633)	お茶の水女子大学・基幹研究院・教授 (12611)	

6．研究組織（つづき）

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
研究協力者	石関　彩 (Ishizeki Aya)		

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関