

令和 5 年 6 月 5 日現在

機関番号：14301

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2021～2022

課題番号：21K20322

研究課題名(和文) 全空間におけるNavier-Stokes乱流の数値解析的研究

研究課題名(英文) Numerical study of Navier-Stokes turbulence in the whole space

研究代表者

大木谷 耕司(Ohkitani, Koji)

京都大学・数理解析研究所・教授

研究者番号：70211787

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,700,000円

研究成果の概要(和文)：流体方程式を全空間で数値的に解き、以下の研究を行った。2個の渦領域の融合過程を、全平面および周期領域、それぞれで計算し時間発展を比較し、周期領域の方が減衰が早いことを示した。3個の渦領域の衝突過程の計算では、エネルギースペクトルの巾則が、全空間の場合に明確に現れ、次元解析の予言 $-11/3$ を含むことを示した。3次元問題では、渦輪の繋ぎ変えの計算を行い、全空間と周期領域の場合を比較した。有限エネルギーの乱流のエネルギースペクトルの巾則 $-8/3$ を持ち得るか否かを検討している。また、3次元ナビエ-ストークス方程式や、1次元の亜粘性Burgers方程式の自己相似プロファイルの研究した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

これまで、多くの数値計算は周期境界条件の下で行われて来ていて、全空間での流れと定性的に同様であると考えられてきた。今回、両者の計算を詳しく比較することで、その差異を明らかにすることが出来た。特に、周期境界条件における周期鏡像列の存在が、流れの減衰早めることを明らかにした。この事は、流体力学方程式の理論解析においても、有用な知見となり新たな手法を生み出すきっかけになると期待する。また、3次元ナビエ-ストークス方程式の(非線型)自己相似プロファイルを決定したのは、世界で初めてである。このプロファイルに現われる非線型性の痕跡を詳細に研究することで、同方程式に関する理解を深める事が可能である。

研究成果の概要(英文)：After developing numerical codes for solving fluid dynamical equations on the whole space, we have carried out the following research.

We simulate merging of like-signed vortices to compare it with that under periodic boundaries. It is found that decay takes place faster on the periodic domain than the whole plane. We also simulate merging of three localized vortices that generates finer spatial structure in order to study the decay law of the total enstrophy and spatial patterns in vorticity. We examined the power-law of the energy spectrum on R2 comparing them with the predictions of phenomenological models, including $E(k) \sim k^{-11/3}$.

For 3D flow we solved fluid equation on the whole space to study reconnection of vortex rings. We are checking if the energy spectrum allows a power-law behaviour $E(k) \sim k^{-8/3}$, characteristic to finite energy turbulence. We also studied self-similar profiles for the 3D Navier-Stokes and hypoviscous Burgers equations.

研究分野：流体力学

キーワード：乱流 周期境界条件 全空間 渦の融合 対流項の役割 自己相似解

様式 C-19、F-19-1、Z-19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

流体方程式の基礎的性質に関する数値解析的研究の多くは、取扱いの便利さから、周期境界条件で行われてきた。一方、数学解析的な研究では、周期境界のみならず、全空間での流れも取扱う。一例として3次元Euler方程式の短時間の存在定理を挙げると、全空間の場合と周期流を比較すると、存在時間の評価が異なる。これは、技術的な事だが、一般的には、周期鏡像の有無により、物理的に興味深い違いをもたらす場合がある。さらに、自己相似解の研究においても、周期境界下では局所相似性を近似的に仮定せざるを得ず、厳密な取扱いには全空間が必要となる。

2. 研究の目的

本研究の目的は、全空間におけるNavier-Stokes乱流の性質を、数値解析的手法で調べて周期境界条件下の結果と直接的に対比することである。境界を持たない流れの基礎研究に関して、これまで数多くの数値解析的研究がなされてきたが、そのほとんどは、周期境界条件下によるものである。他方、 R^3 と T^3 の場合の数学解析的研究では、それらの評価式が若干異なる。ここでは、2次元流、及び、3次元流について物理的、数学的に興味がある問題を取り上げ、直接数値計算により境界条件による相違を吟味する

3. 研究の方法

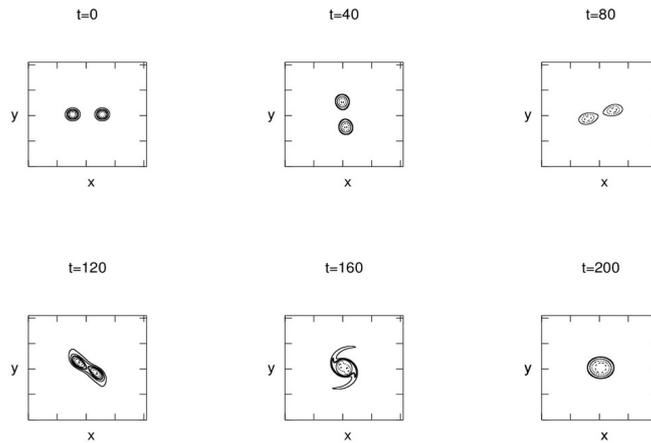
数値解析的な側面では、差分解法に高速ポアソンソルバーを用いて、2次元・3次元Navier-Stokes方程式を全空間での、直接数値計算を行うためのプログラムを構築した。まず、挙動の分かっている線型化解など、コードの妥当性を検証した後、2次元問題から計算に着手した。全平面での計算を得た後、初期値を周期領域に移植し、標準的なフーリエ擬スペクトル法による、直接数値計算を実行した。

(その際、データの移植の方法を、注意深く考慮し、整合性のある方法を定式化した。)

その後、2次元での経験を活かして、3次元問題に取り組んだ。

4. 研究成果

2次元では、2個の同符号を持つ局在した渦の融合過程を計算し(図参照)、初期値を周期領域に移植して、繰り返した計算と比較した。その結果、渦の融合は、周期境界条件下では、ずっと早い時間スケールで起きることを観察した。次に、3個の局在した渦の融合過程を計算し、そのエンストロフィースペクトルにあらわれる冪法則を、種々の現象論と比較した。その指数は、-1から-2に分布しているが、渦糸の巻き上げによるスパイラルモデルの予言-5/3をも含むことを観察した。この値は、全平面におけるエンストロフィーカスケードの数学解析に現われる閾値と一致しているという興味深い事実を注意した。この初期値を移植後から計算した周期流の場合、エンストロフィーなどの減衰は、より早く起きて、エンストロフィースペクトルには、冪則は見られない、即ち、より急な減少しかみられないことを観察した。この3個の渦領域の設定は、有限時間で衝突する3本の渦糸の問題の正則化になっていて、異常散逸が起き得る配位と考えられる点で興味深い。(この研究は、現在、投稿中である。)



3次元では、長年の懸案であった、3次元Navier-Stokes方程式の自己相似プロファイルを、今回構築したコードによる時間発展法に、スケール変換を組み合わせることで、数値的に決定することに成功した。自身の研究で、既に得ていた、線形化方程式の表現(厳密解)を初期値にとり、時間発展させることで変換後のプロファイルが収束することを確認することが出来た。今回、数値的に得られたプロファイルは3次元Navier-Stokes方程式の非線形項に由来する摂動を含んでいるため、その詳細な研究から、この方程式の解の挙動に対する知見を得ることができる。

3次元の時間発展問題としては、2個の渦輪の繋ぎ変えの問題を取扱った。周期境界の場合と比較している。こうして、より非線形性が強く現われるような設定で計算を行ない、全空間での乱流の特徴づけを行なう素地が出来上がった。

また、1次元の垂粘性Burgers方程式の自己相似解の問題を、理論的に定式化し、その自己相似プロファイルを特徴付ける、擬恒等変換の満足する方程式を導いた。(この事は、この系が可積分であることを示している。) その近似解を構成し、Newton法で数値的に得られたプロファイルと近いことを確認した

関連する研究として、Navier-Stokes方程式の正則性を担保する対流項の役割を調べるため、その項に修正を加えた方程式を考察した。直接数値計算によって、修正された方程式の解が、有限時間で爆発することを示した。また、元の方程式を復元する極限において、爆発時間が非有界になることを示した。これらは、Navier-Stokes方程式の長時間の正則性と整合する結果である。

<引用文献>

K. Ohkitani, "Self-similar solutions to the hypoviscous Burgers and SQG equations at criticality," J. Phys. A: Math. Theor. (2023).

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 1件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Koji Ohkitani	4. 巻 -
2. 論文標題 Self-similar profiles of solution to hypo-viscous fluid equations	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Koji Ohkitani	4. 巻 -
2. 論文標題 Self-similar solutions to the hypoviscous Burgers and SQG equations at criticality	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 J. Phys. A: Math. Theor.	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1088/1751-8121/acdb12	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計6件（うち招待講演 2件/うち国際学会 3件）

1. 発表者名 Koji Ohkitani
2. 発表標題 Self-similar Solutions to the Hypoviscous Burgers Equation at Criticality
3. 学会等名 ICMS Workshop: Convex Integration and Nonlinear Partial Differential Equations（国際学会）
4. 発表年 2021年～2022年

1. 発表者名 大木谷耕司
2. 発表標題 Self-similar profiles of solution to hypo-viscous fluid equations
3. 学会等名 RIMS共同研究「非圧縮性粘性流体の数理解析」（招待講演）
4. 発表年 2021年～2022年

1. 発表者名 Koji Ohkitani
2. 発表標題 Building blocks for representing the decay of 3D Navier-Stokes flows and their applications
3. 学会等名 BAMC2022 (Loughborough) (国際学会)
4. 発表年 2022年～2023年

1. 発表者名 大木谷耕司
2. 発表標題 全平面におけるNavier-Stokes流の数値計算
3. 学会等名 日本応用数理学会
4. 発表年 2022年～2023年

1. 発表者名 大木谷耕司
2. 発表標題 Navier-Stokes流の正則性についての対流項の役割
3. 学会等名 現象と数理モデル 2022 (尾道) (招待講演)
4. 発表年 2022年～2023年

1. 発表者名 Koji Ohkitani
2. 発表標題 Numerical study on how advection delays and removes singularity formation in the Navier-Stokes equations
3. 学会等名 RIMS workshop on "Analysis of Fluid Dynamical PDEs" (国際学会)
4. 発表年 2022年～2023年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 RIMS workshop "Analysis of Fluid Dynamical PDEs"	開催年 2022年～2023年
--	--------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------