2版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　５ 年　６ 月 ２０ 日現在

機関番号：１４６０２
研究種目：研究活動スタート支援
研究期間：2021～2022
課題番号：２１Ｋ２０３２８
研究課題名（和文）ヘガード理論に基づく3次元多様体と絡み目の研究

研究課題名（英文）Research on 3-manifolds and links based on the Heegaard theory

研究代表者
張　娟姫（Jang, Yeonhee）

奈良女子大学・自然科学系・准教授

研究者番号：９０７０８３４８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,500,000円

研究成果の概要（和文）：3次元多様体のヘガード分解と絡み目の橋分解のHempel距離に関する研究を行い、keenおよびstrongly keenという性質を持つ絡み目の橋分解が豊富に存在することを証明することができた。
また、橋分解に当たる概念がこれまでいくつか異なる形で形式化され、それらが同様な概念として扱われてきたように伺えるが、その違いについて明確にさせることを目標に研究を行ってきた。その結果、橋分解の同値類とイソトピー類および橋位置のイソトピー類の間の関係を明らかにすることができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義
これまで同様な概念として扱われてきた概念の間に一部本質的な違いがあることも含めて、それらの関係が明らかになったのは、今後の橋分解の研究に大きな影響を与えると考える。また、keenおよびstrongly keenな橋分解は分解のGoeritz群の有限性との関係等、様々な良い性質を持っていると思われることから、橋分解と関係する多方向への研究に貢献できるのではないかと期待している。

研究成果の概要（英文）：As a result of research on Hempel distance for Heegaard splittings of 3-manifolds and bridge splittings of links, we proved that there exist a lot of keen and strongly keen bridge splittings of links.
It seems that the concept of bridge splittings of links were defined in several different way and have been treated as the same concept so far, but we tried to make it clear the differences between them. As a result, we obtain a certain results on relations among homeomorphism classes and isotopy classees of bridge decompositions and isotopy classes of bridge positions.

研究分野：位相幾何学

キーワード：ヘガード分解　橋分解　Hempel距離

１．研究開始当初の背景

3 次元多様体のヘガード分解および絡み目の橋分解は「複雑な対象を簡単なパーツに分ける」という基本的で重要な考え方に基づいた概念で、長年古典的な研究がなされてきた。しかし、1980 年代にヘガード分解の強い既約性という概念が導入され、更にその一般化として Hempel 距離が導入されて以来、この方面の研究が急速に進んだ。特に、高い Hempel 距離の分解をもつ多様体・絡み目は本質的曲面を許容しにくく、最小指数の分解を 1 つしか許容しない等、ある種の合成をもつことが分かり、ヘガード分解・橋分解の Hempel 距離は、分解の複雑さのみならず、多様体・絡み目固有の複雑さもよく反映しているともいえる。また、ヘガード種数や距離等は多様体・絡み目の対称性とも深く関係していることも分かってきている。

研究代表者の張は、小林毅氏、井戸絢子氏との共同研究により、任意の自然数 n に対して、Hempel 距離がちょうど n のヘガード分解および橋分解が存在することを証明しており、更にヘガード分解の「鋭さ」という概念を提案し、keen および strongly keen なヘガード分解の存在も証明した。その後、井口氏、古宇田氏により、この「鋭さ」という概念がヘガード分解の Georitz 群の有限性とも関係していることが分かった。

また、橋分解の同値性について研究を行うに当たり、これまで橋分解という概念がいくつか異なる形で形式化され、同じ概念として扱われてきたが、それらの関係を明確にさせる必要があると感じていた。

２．研究の目的

本研究では、ヘガード分解の「鋭さ」の概念を一般化し、様々な「鋭さ」を持つヘガード分解・橋分解の構成と特徴づけを行うことを目的とし、Georitz 群等の研究への応用も目指した。

また、橋分解およびそれらの同値性に関する各概念の間の関係を明確にさせることも目指して研究を行った。

３．研究の方法

まずは、keen および strongly keen なヘガード分解の構成法を応用し、鋭さをもつ橋分解の構成を行った。ヘガード分解の場合と異なり、種数が 1 または 0 の場合は構成に用いる単純閉曲線の種類を非分離的なものから分離的なものに変える必要等があったため、細かく場合分けし、それぞれのケースに合わせて構成法を少しずつ変えた。また、円盤複体と呼ばれる橋曲面の曲線複体の部分複体をある部分曲面上に射影したときの像の直径の有限性についても考察が必要であったが、Li による円盤複体の射影に関する議論を応用した。

また、橋分解およびその同値性に関する各概念については、まず「橋分解の同相類」、「橋分解のイソトピー類」、「橋位置のイソトピー類」の 3 つについて、その間の関係を明らかにし、これまで知られている結果やその証明がどの概念に関するものだったのかをまとめた。

４．研究成果

keen および strongly keen な橋分解については、小林毅氏、井戸絢子氏と共同研究を続け、鋭さを持つ橋分解が豊富に存在すること、およびある場合においては鋭さをもつことが不可能であることを示した。具体的には、任意の自然数 n と b、任意の正の整数 g に対して、(g,b)=(0,1)および(g,b,n)=(0,3,1)の場合を除いて、strongly keen な(g,b)-分解で Hempel 距離が n であるものが存在することを証明した。更に、多くの場合において、その構成に使われる測地線の一部を置き換えることにより、keen であるが strongly keen でない橋分解も構成することができる。一方、(g,b,n)=(0,3,1)の場合については、keen な橋分解は存在しないことも証明した。また、斎藤敏夫氏の結果を用いれば、Hempel 距離が 1 の(1,1)-分解は常に strongly keen であることも分かった。

「橋分解の同相類」、「橋分解のイソトピー類」、「橋位置のイソトピー類」の関係については、

小林毅氏、小沢誠氏、高尾和人氏と共同研究を行い、橋分解の同相類と橋位置のイソトピー類の間には一対一対応があることを証明し、一方、それらと橋分解のイソトピー類の間には本質的な違いがあることを明らかにした。更に、これまで橋分解・橋位置について知られている結果を、この違いに注意しながらまとめ直して、論文を執筆中である。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計0件

〔学会発表〕　計2件（うち招待講演　1件／うち国際学会　1件）

１．発表者名 小林毅
２．発表標題 On keen bridge splittings of links
３．学会等名 結び目の数理IV
４．発表年 2021年

１．発表者名 張娟姫
２．発表標題 On keen bridge splittings
３．学会等名 The 13th KOOK-TAPU Joint Seminar on Knots and Related Topics（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2022年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関